詳細解答

STEP I 1992，第 16 題

概率與統計 • 網絡可靠度

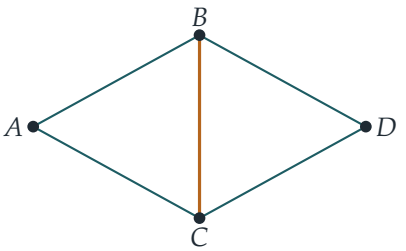
STEP I 1992，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s1-q16

關鍵思路

這個道路網絡是一座「橋」：由 A 到 D 有兩條路線，一條經過 B，一條經過 C，而道路 CB 在中間把兩者連接起來。處理這座橋最乾淨利落的方法，是按 CB 是否暢通來取條件（condition），因為一旦知道這一點，一切都化為串聯（series）和並聯（parallel）的道路。為一條道路加設防雪設施，效果等同把它的兩個端點合併成一個市鎮，所以我們可以考察兩個方案各自產生的較小網絡，從而比較兩者。



解答

以下一律以 $q = 1 - p$ 表示某條道路暢通的概率。各條道路是否被封是互相獨立（independent）的，所以任何一種特定的「暢通與被封」組合，其概率都是若干個 p 和 q 的乘積。由 A 到 D 而不重複經過任何市鎮的路線共有四條：

$$ABD, \qquad ACD, \qquad ABCD, \qquad ACBD.$$

唯一暢通的路線是 $ABCD$

要 $ABCD$ 暢通，AB、BC 和 CD 必須全部暢通。要它成為唯一暢通的路線，ABD 必須被封，而由於 AB 暢通，這就迫使 BD 被封。同理，ACD 必須被封，而由於 CD 暢通，這就迫使 AC 被封。這樣 $ACBD$ 也自動被封（它同時用到 AC 和 BD）。

所以這個事件（event）恰好就是「AB、BC、CD 暢通，而 AC、BD 被封」。由獨立性，其概率為

$$q^3p^2 = p^2(1-p)^3,$$

正如所求。

現時能夠通行的概率

設 E 為 A 與 D 有未被封的道路相連這個事件，並按道路 CB 的狀況取條件。

若 CB 暢通，則 B 和 C 就如同一個市鎮。除非 AB 和 AC 同時被封，否則我們可以由 A 到達這個市鎮；除非 BD 和 CD 同時被封，否則可以由這個市鎮到達 D。這兩件事涉及不同的道路，所以

$$\mathrm{P}(E \mid CB \text{ 暢通}) = (1-p^2)^2.$$

若 CB 被封，可行的路線只有 ABD 和 ACD，各自暢通的概率為 q^2，而且兩者沒有共用的道路，所以互相獨立。因此

$$\mathrm{P}(E \mid CB \text{ 被封}) = 1-(1-q^2)^2.$$

改為計算 A 與 D 被隔絕的概率會較為方便。由於 $1-(1-p^2)^2 = p^2(2-p^2)$ 及 $1-q^2 = p(2-p)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{被隔絕}) &= q\,p^2(2-p^2) + p\cdot p^2(2-p)^2\\ &= p^2[(1-p)(2-p^2) + p(4-4p+p^2)]\\ &= p^2\,(2+2p-5p^2+2p^3).\end{aligned}$$

應為哪條道路加設防雪設施

爲 CB 加設防雪設施。這時 CB 永遠暢通，所以我們永遠處於上面的第一種情況：

$$\mathrm{P}(\text{被隔絕}) = 1-(1-p^2)^2 = 2p^2-p^4.$$

爲 AB 加設防雪設施。這時 A 和 B 就如同一個市鎮，而我們與 D 被隔絕，當且僅當 BD 被封，並且經 C 也無路可通。經 C 通行需要 CD 暢通，並且 AC、CB 之中至少有一條暢通，所以此路不通的概率為 $p+q\,p^2$。因此

$$\mathrm{P}(\text{被隔絕}) = p\,(p+qp^2) = p^2+p^3-p^4.$$

想一想 兩個答案都以 p^2 項開頭。怎樣才能判斷對每一個 p 而言哪一個較小？

把兩者相減：

$$(2p^2 - p^4) - (p^2 + p^3 - p^4) = p^2 - p^3 = p^2(1-p) > 0 \quad \text{其中} 0 < p < 1.$$

所以為 AB 加設防雪設施，被隔絕的機會總是較小，不論 p 的值是多少。政府應該選擇 AB；兩個選擇永遠不會同樣好。

這與直覺吻合。修好 CB 只在需要它作為繞道的一部分時才有幫助，但修好 AB 卻令 A 和 B 成為一個市鎮，這個市鎮既有直路 BD 通往 D，也有經過 C 的路徑可走。

最後一部分

當 $p = \frac{1}{10}$ 時，現時被隔絕的概率為

$$\frac{1}{100}\left(2 + \frac{2}{10} - \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}\right) = \frac{1}{100} \times 2.152 = 0.02152.$$

這大於 $\frac{1}{100}$，所以政府會落實計劃（而且根據上一部分，它會為 AB 加設防雪設施）。

單看主項 $2p^2 = 0.02$ 已足以定論：只需兩條道路被封便被隔絕的情況有兩種，即 $\{AB, AC\}$ 和 $\{BD, CD\}$。

驗算

- 當 $p \to 0$ 時，被隔絕的概率約為 $2p^2$，這正好數算了那兩對道路：其中一對被封，便會把 A 或 D 孤立起來。為 AB 加設防雪設施後，只剩下 $\{BD, CD\}$ 這一對，概率約為 p^2，與我們的公式相符。為 CB 加設防雪設施後，兩對仍然存在，概率約為 $2p^2$。
- 當 $p = 1$ 時，現時的公式給出 $1 \cdot (2 + 2 - 5 + 2) = 1$：若每條道路都被封，我們必定被隔絕。
- 把道路暢通與被封的全部 2^5 種組合逐一窮舉，對多個 p 值都證實了以上每一條公式。當 $p = \frac{1}{10}$ 時，窮舉給出現時的概率為 0.02152，為 AB 加設防雪設施後為 0.0109，為 CB 加設防雪設施後為 0.0199。模擬（simulation）2×10^5 個冬天所得的結果是 0.0215。

常見錯誤

- 把四條路線暢通的概率相加。這些路線有共用的道路，所以這些事件互有重疊，相加會重複計算。
- 在第一部分，忘記了「唯一暢通的路線」會迫使 AC 和 BD 被封，結果只寫出 $(1-p)^3$。

- 只在 $p = \frac{1}{10}$ 時比較兩個方案。兩者之差 $p^2(1-p)$ 說明對每一個 p 而言都是 AB 較佳。

STEP 之外

這是網絡可靠性（network reliability）的一個小例子，而按一條邊取條件（或把它的兩端合併）這個技巧，正是貫穿圖論（graph theory）的刪除—收縮（deletion–contraction）思想。對於大型的隨機網絡，同樣的問題會引向滲流理論（percolation theory），當中 p 有一個分明的臨界值，一旦越過，長距離的連通便會突然消失。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）是打好這裏所用的條件概率工具的好地方。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。