詳細解答

STEP I 1992，第 15 題

概率與統計 • 期望等候時間

STEP I 1992，第 15 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s1-q15

關鍵思路

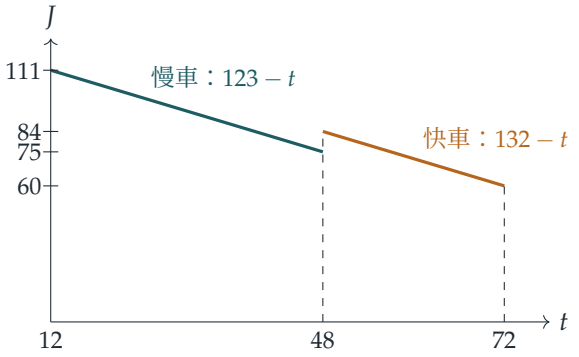
一切每小時重複一次，所以只需考慮一名乘客，其到達時間在一小時內均勻分佈（uniformly distributed）。這一小時分成兩段間隔：在某班列車之前那段間隔內到達的乘客，全部都會乘搭該班列車，而每人的行程時間就是「等候時間加行車時間」。在同一段間隔內，等候時間是均勻分佈的，所以其平均值是間隔長度的一半。這樣，整條題目就化為一個以其中一段間隔的長度為變數的二次式（quadratic）。

解答

現行時間表

以正午之後的分鐘數量度時間 t（任何一個小時都可以），並設乘客的到達時間 T 在長一小時的區間 $(12, 72]$ 上均勻分佈。這段時間內的列車有：在 48 開出的慢車，於 $48 + 75 = 123$ 抵達倫敦；以及在 72（即下一個小時的 12 分）開出的快車，於 $72 + 60 = 132$ 抵達。

- 若 $12 < T \leq 48$，最先可乘搭的是慢車，所以行程時間為 $J = 123 - T$。
- 若 $48 < T \leq 72$，最先可乘搭的是快車，所以 $J = 132 - T$。



由於 T 在 $(12, 72]$ 上的概率密度（density）為 $\frac{1}{60}$，

$$\mathrm{E}(J) = \frac{1}{60}\left[\int_{12}^{48}(123-t)\,\mathrm{d}t + \int_{48}^{72}(132-t)\,\mathrm{d}t\right].$$

兩個被積函數（integrand）都是線性的，所以每個積分都等於區間長度乘以函數在區間中點的值：

$$\int_{12}^{48}(123-t)\,\mathrm{d}t = 36\times(123-30) = 3348, \qquad \int_{48}^{72}(132-t)\,\mathrm{d}t = 24\times(132-60) = 1728.$$

因此

$$\mathrm{E}(J) = \frac{3348+1728}{60} = \frac{5076}{60} = 84.6 \text{ 分鐘},$$

正如所求。

重新編排快車的開出時間

現在設快車在每小時的 x 分開出，慢車則仍在 48 分開出。設 d 為由一班快車開出至下一班慢車開出所相隔的分鐘數，所以 $0 \le d < 60$ 且 $d \equiv 48 - x \pmod{60}$。（在原來的時間表中，$d = 36$。）於是這一小時分成

- 每班慢車之前一段長度為 d 的間隔：這些乘客的等候時間 W 在 $[0, d)$ 上均勻分佈，然後行車 75 分鐘；
- 每班快車之前一段長度為 $60 - d$ 的間隔：這些乘客的等候時間在 $[0, 60-d)$ 上均勻分佈，然後行車 60 分鐘。

乘客落在第一段間隔的概率是 $\frac{d}{60}$，落在第二段的概率是 $\frac{60-d}{60}$，而在長度為 g 的間隔上均勻分佈的等候時間，其平均值為 $\frac{g}{2}$。所以，按乘客在哪一段間隔到達來取條件（condi-

tioning），可得

$$\begin{aligned}60\,\mathrm{E}(J) &= d\left(\frac{d}{2}+75\right)+(60-d)\left(\frac{60-d}{2}+60\right)\\ &= \frac{d^2}{2}+75d+\frac{3600-120d+d^2}{2}+3600-60d\\ &= d^2-45d+5400.\end{aligned}$$

作為驗算，$d=36$ 給出 $1296-1620+5400=5076$，與第一部分吻合。

想一想 為甚麼最佳的間隔不是 $d=30$，即把一小時平均分成兩半？

在慢車那段間隔內到達的每名乘客，都要因為行車較慢而多付 15 分鐘的代價。所以我們希望那段間隔內的乘客少一些，也就是要把它縮短至少於半小時，但又不能短得令快車那段間隔（以及那些乘客的等候時間）變得太長。這個二次式正好平衡了這兩種效應。

配方（completing the square）後，

$$d^2-45d+5400=\left(d-\tfrac{45}{2}\right)^2+5400-\tfrac{2025}{4},$$

它在 $d=22.5$ 時取得最小值，而這個值在 $[0,60)$ 之內。此時 $60\,\mathrm{E}(J)=\frac{19575}{4}$，所以平均行程時間的最小值為

$$\mathrm{E}(J)=\frac{19575}{240}=\frac{1305}{16}=81\tfrac{9}{16}\approx 81.56 \text{ 分鐘}.$$

快車必須比慢車早 22.5 分鐘開出，所以

$$x=48-22.5=25.5,$$

即快車應在每小時的 $25\frac{1}{2}$ 分開出。若開出時間必須是整數分鐘，則 $x=25$ 與 $x=26$（$d=23$ 與 $d=22$）不分高下，兩者都給出 $\frac{2447}{30}\approx 81.57$ 分鐘。

驗算

- 當 $d=0$ 時，兩班列車同時開出；人人都乘搭快車，平均等候 30 分鐘，所以 $\mathrm{E}(J)=90$。公式給出 $\frac{5400}{60}=90$。
- 當 $d\to 60$ 時，慢車剛好在快車之前開出，幾乎接載了所有乘客：平均等候 30 分鐘，行車 75 分鐘，合共 105 分鐘。公式給出 $\frac{3600-2700+5400}{60}=105$。
- 以步長 0.1 的網格取遍每個 x，對一小時內的行程時間作數值積分（numerical integration），所得結果是：$x=12$ 時為 84.6，而最小值 81.5625 出現在 $x=25.5$。

常見錯誤

- 把在每小時 48 分至 60 分之間到達的乘客算作乘搭「12 分」開出的快車，卻沒有加上一小時：他們的列車是在下一個小時的 12 分開出的。
- 以列車的班數而非間隔的長度作為權重，去平均兩個行車時間；決定一班列車接載多少乘客的，是該班列車之前那段間隔的長度。

STEP 之外

這裏計算的量，是週期性時間表下的平均等候時間；而「較長的間隔會接載較多乘客」這個觀察，正是檢查悖論（inspection paradox）的一種形式：隨機到達的乘客，落在長間隔的機會比落在短間隔的大。這是更新理論（renewal theory）和排隊論（queueing theory）的核心概念，這兩門理論研究的是隨機的到達與服務。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）是認識取條件與期望值（expectation）這些基礎工具的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。