詳細解答

STEP I 1992，第 13 題

力學 • 逃逸速率與徑向下落

STEP I 1992，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

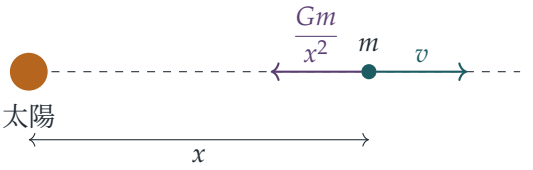
step.maths.org/questions/92-s1-q13

關鍵思路

力只取決於距離 x，所以最自然的工具是把運動方程（equation of motion）寫成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 的形式，一經積分便立即得到聯繫速率與距離的能量方程（energy equation）。在第一部分，v^2 永遠不可能是負數這一事實，把該方程變成 x 的一個上限。在第二部分，能量方程把 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 表示為 x 的函數，再用分離變數法（separating the variables）便可求出時間。

解答

我們把太陽當作固定不動，把彗星當作質點（particle），除了題目給出的引力外不受其他力。由於引力沿着連接彗星與太陽的直線作用，一顆正在直接遠離太陽（或處於靜止）的彗星會一直沿着該直線運動。因此 x 是一條直線上的坐標，我們設 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，並以 v 為正表示遠離太陽。



能量方程

沿該直線應用牛頓第二定律（Newton's second law），力指向太陽（即 x 減少的方向），得

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Gm}{x^2}.$$

把加速度寫成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 並約去 m，

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{G}{x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}v^2 = \frac{G}{x} + C$$

其中 C 為某個常數。無論彗星朝哪個方向運動，這條式在整個運動過程中都成立。（這就是每單位質量的能量守恆（conservation of energy）：動能（kinetic energy）$\frac{1}{2}v^2$ 加上勢能（potential energy）$-G/x$。）

x 可變得任意大的條件

在給定的一刻 $x = h$ 而 $v = V$，所以 $C = \frac{1}{2}V^2 - \dfrac{G}{h}$，而在其後任何時刻，

$$v^2 = V^2 - \frac{2G}{h} + \frac{2G}{x}.$$

我們證明其逆否命題（contrapositive）：若 $V^2 < 2G/h$，則 x 有界（bounded）。

> **想一想** 原則上，彗星往後可以有各式各樣的運動方式。單憑一條方程，怎能在所有時刻都限制住 x？

因為無論彗星在做甚麼，每一瞬間都有 $v^2 \geq 0$。假設 $V^2 < 2G/h$，並設 $k = \dfrac{2G}{h} - V^2 > 0$。那麼能量方程說明

$$\frac{2G}{x} = v^2 + k \;\geq\; k, \qquad \text{所以} \qquad x \leq \frac{2G}{k} = \frac{2Gh}{2G - hV^2}$$

在其後任何時刻都成立（由於 $x > 0$ 且 $k > 0$，我們可以把兩邊乘開）。所以 x 永遠不能超過固定值 $2Gh/(2G - hV^2)$：彗星上升到該距離，在那裏 $v = 0$，然後往回落。因此，除非 $V^2 \geq 2G/h$，否則 x 不可能變得任意大，這正是所要證明的。

（逆命題（converse）也成立。若 $V^2 \geq 2G/h$，則彗星向外運動時 $v^2 \geq 2G/x > 0$，所以它永不停下；又因為只要 $x \leq X$ 便有 $v^2 \geq 2G/x \geq 2G/X$，它不可能永遠停留在任何距離 X 以內。這就是逃逸速率（escape speed）。）

墜入太陽所需的時間

現在彗星在極遠的距離 D 處由靜止開始運動。由靜止釋放後，它筆直地墜向太陽。由能量方程，以及在 $x = D$ 處 $v = 0$，

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{G}{x} - \frac{G}{D}.$$

> **想一想** 「極遠的距離」對那個常數來說意味着甚麼？

這表示我們令 $D \to \infty$，於是 $G/D \to 0$，常數為零：彗星的總能量為零。（若 D 很大但有限，彗星只會稍為慢一點，所需時間稍為長一點，而相差的量當 $D \to \infty$ 時趨向零。）所以在距離 x 處它的速率是 $\sqrt{2G/x}$，而且由於 x 正在減少，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2G}{x}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{2G}\,\mathrm{d}t.$$

設 T 為由 $x = h$ 到 $x = 0$ 所需的時間。積分得

$$\sqrt{2G}\,T = \int_0^h \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}h^{3/2},$$

所以

$$T = \frac{2h^{3/2}}{3\sqrt{2G}} = \frac{h}{3}\sqrt{\frac{2h}{G}}.$$

（被積函數（integrand）$\sqrt{x}$ 在 $x = 0$ 處完全沒有問題，所以儘管彗星的速率無止境地增大，它確實在有限時間內到達太陽。）

驗算

- 單位：力 Gm/x^2 是質量乘以加速度，所以 G 的單位是 $\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-2}$。於是 V^2 和 $2G/h$ 的單位都是 $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$，而 $h^{3/2}/\sqrt{G}$ 的單位是秒。
- 在 $x = h$ 處彗星的速率是 $\sqrt{2G/h}$。假如它保持這個速率，所需時間便是 $h/\sqrt{2G/h} = \frac{h}{2}\sqrt{2h/G}$，這比 T 長；彗星一直在加速，所以理應如此。事實上 T 是這個時間的三分之二。
- 數值驗證，取 $G = h = 1$：由 $x = 1$、$v = \sqrt{1.5}$ 出發逐步推算運動，彗星在 $x = 4.000$ 處掉頭，與 $2Gh/(2G - hV^2) = 4$ 的預測相符。由 $x = 1$、$v = -\sqrt{2}$ 出發，它經過 0.4714 後到達太陽，與 $T = \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0.47140$ 吻合。若改為由 $D = 10^6$ 而非無窮遠處從靜止出發，T 只在小數點後第七位才有變化。

常見錯誤

- 漏掉 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2G/x}$ 中的負號，結果得到負的時間，或者由 0 積分到 h 卻沒有說明原因。
- 只證明彗星會減速：每一顆向外運動的彗星都會減速，即使是能夠逃逸的那些也一樣。重點在於，當 $V^2 < 2G/h$ 時，v^2 在超過某個距離後便會變成負數。

STEP 之外

$\frac{1}{2}v^2 - G/x$ 這個量是牛頓引力場（Newtonian gravitational field）中每單位質量的能量，它的正負決定了軌道是束縛軌道（橢圓）還是逃逸軌道（拋物線和雙曲線）。最後一部分的零能量墜落，是拋物線軌道退化成直線的特殊情況，而 $T \propto h^{3/2}$ 則與開普勒第三定律（Kepler's third law）一脈相承。大學一年級有關軌道的課程，正是由同樣的能量方程和角動量（angular momentum）方程出發，推導出這一切；Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對有心力（central forces）和軌道有透徹的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。