詳細解答

STEP I 1992，第 12 題

力學 • 涉及摩擦力的靜力學

STEP I 1992，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s1-q12

關鍵思路

兩把梯子都是輕質的，所以要為其中一把梯子列出有用的方程，唯一的辦法就是對鉸鏈（hinge）A 取力矩（moments）：這樣可以消去另一把梯子所施的未知力，以及 A 處負重所施的力。梯腳有向外滑開的趨勢，而這股向外的推力，一部分由摩擦力（friction）抵消，一部分由木桿抵消。在梯子倒塌的一刻，摩擦力已經用盡，餘下的就要由木桿承擔。

解答

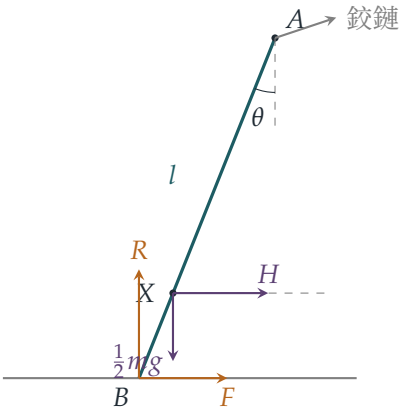
模型

兩把梯子是輕桿，在 A 處以光滑鉸鏈連接。木桿 XY 是均勻的，質量為 m，並在 X 和 Y 處以銷釘接合（pin-jointed）。質量 M 視為位於 A 的質點（particle）。設 $t = \tan\theta$。由於整個裝置左右對稱，兩隻梯腳所受的法向反作用力（normal reaction）相等，設為 R；對整座摺梯沿鉛垂方向分解力，可得

$$2R = (M+m)g \quad \Longrightarrow \quad R = \tfrac{1}{2}(M+m)g.$$

由於梯子向外傾斜，梯腳有向外滑開的趨勢，所以每隻梯腳所受的摩擦力 F 都指向內。

木桿所施的力。 木桿是水平的，而且本身有重量，所以它兩端所受的力並不沿着木桿的方向。根據對稱性，兩端各承受木桿重量的一半，所以梯子在 X 處對木桿施加向上的力 $\frac{1}{2}mg$，同時施加一個向外的水平力 H（即張力（tension））。根據牛頓第三定律（Newton's third law），木桿在 X 處對梯子 AB 施加向內的水平力 H 和向下的鉛垂力 $\frac{1}{2}mg$。



對梯子 AB 以 A 為支點取力矩

從 A 量起，梯腳 B 的水平距離為 $l\sin\theta$，鉛垂距離為向下 $l\cos\theta$；而 X 的水平距離為 $\frac{3}{4}l\sin\theta$，鉛垂距離為向下 $\frac{3}{4}l\cos\theta$。對 A 取力矩（作用於 A 的力全部沒有力矩）：

- R 使梯子向一個方向轉動，力矩為 $Rl\sin\theta$；
- F 和 H（兩者都指向內，作用點在 A 的下方）使梯子向另一個方向轉動，力矩分別為 $Fl\cos\theta$ 和 $H\cdot\frac{3}{4}l\cos\theta$；
- 作用於 X 的向下力 $\frac{1}{2}mg$ 與 R 在同一側，但方向相反，其力矩 $\frac{1}{2}mg\cdot\frac{3}{4}l\sin\theta$ 與 R 的力矩相抗。

因此

$$Fl\cos\theta+\tfrac{3}{4}Hl\cos\theta=Rl\sin\theta-\tfrac{3}{8}mgl\sin\theta,$$

兩邊除以 $l\cos\theta$，再代入 R 的值，得

$$F+\tfrac{3}{4}H=t\left(\tfrac{1}{2}(M+m)g-\tfrac{3}{8}mg\right)=t\left(\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{8}m\right)g. \qquad (*)$$

想一想 摩擦力和木桿都在把梯腳向內拉住。那麼 F 應該取哪個值？

方程 $(*)$ 表明，摩擦力和張力要合力分擔一個固定的總量：摩擦力承擔得愈多，木桿需要承擔的就愈少。所以，只要有某個容許的摩擦力（$F\le\mu R$）能令 $H\le T$，摺梯就不會倒塌；而最小的張力出現在摩擦力最大的時候，即 $F=\mu R$。這正是題目容許我們假設的、倒塌一刻的極限狀態（limiting state）。把 $F=\mu R=\frac{1}{2}\mu(M+m)g$ 代入 $(*)$：

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{4}H&=t\left(\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{8}m\right)g-\tfrac{1}{2}\mu(M+m)g\\&=\tfrac{1}{2}(t-\mu)Mg+\tfrac{1}{8}(t-4\mu)mg,\end{aligned}$$

所以

$$H = \tfrac{2}{3}(t-\mu)Mg + \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg.$$

由於 $t > \mu$，H 隨 M 增加而增加：假如沒有木桿，單靠摩擦力連負重本身也支撐不住（當 $m = 0$ 時，我們需要 $t \le \mu$）。

最大的安全質量

只要 $H \le T$，木桿就不會折斷，即

$$\tfrac{2}{3}(t-\mu)Mg \le T - \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg,$$

兩邊除以正數 $\tfrac{2}{3}(t-\mu)g$，得

$$\boxed{M \le \frac{6T - (\tan\theta - 4\mu)mg}{4(\tan\theta - \mu)g}}$$

所以，可以安全地放在 A 處的最大質量是 $\dfrac{6T - (\tan\theta - 4\mu)mg}{4(\tan\theta - \mu)g}$。

因自身重量而損毀

當 A 處沒有放任何東西（$M = 0$）時，所需的張力為 $H = \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg$，所以木桿會在以下情況折斷：

$$\tfrac{1}{6}(\tan\theta - 4\mu)mg > T \iff \tan\theta > \frac{6T}{mg} + 4\mu,$$

這正是題目要求證明的結果。在這個情況下，上面 M 的上界是負數：任何負重都不安全，因為摺梯連自身也支撐不住。

驗算

- 如果 T 極大，安全質量也極大；如果 $\tan\theta$ 只是略大於 μ，分母就極小，同樣幾乎任何負重都安全，因為單靠摩擦力已差不多足夠。
- 我們對完整的靜力學（statics）問題（兩把梯子、木桿和 A 處的銷釘，共十二個未知的分力，兩隻梯腳的摩擦力均達極限值）作數值求解，隨機選取 2000 組配置，所得結果與張力公式吻合，誤差約為 10^{-12}。例如，當 $\theta = 45°$、$\mu = 0.2$、$m = 2\,\mathrm{kg}$ 及 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 時，$M = 0$ 的木桿張力為 $\tfrac{1}{6}(0.2)(19.6) \approx 0.653\,\mathrm{N}$。

常見錯誤

- 把木桿當作輕質拉桿，以為 X 處的力完全沿着 XY 的方向。木桿是有重量的，所以每一端還要在鉛垂方向承受 $\tfrac{1}{2}mg$，而 $\tfrac{1}{8}m$ 和 4μ 正是由此而來。

► 把梯腳的摩擦力畫成向外。由於 $\tan\theta > \mu$，梯腳有向外張開的趨勢，所以摩擦力指向內，與木桿一同把梯腳拉住。

STEP 之外

像這樣的框架，單憑平衡（equilibrium）方程並不足以確定每一個力（在這裏，摩擦力和張力可以此消彼長），稱為靜不定（statically indeterminate）。工程師會借助額外的資料來處理這類情況：例如本題所用的極限條件，或者構件的彈性（elasticity）。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）是加深理解力、力矩（torque）和平衡的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。