詳細解答

STEP I 1992，第 11 題

力學 • 彈性繩的平衡

> **STEP I 1992，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q11

關鍵思路

每個質點都處於平衡（equilibrium）狀態，所以緊接其上方的張力比緊接其下方的張力大 mg。這就把三個張力聯繫起來，而虎克定律（Hooke's law）則把張力化為伸長量。我們還需要的另一項事實是幾何上的：三條拉長後的弦線，長度之和必須等於房間的高度。一旦求得各高度，「$CD = a$」只不過是說最低的那條弦線沒有張力。

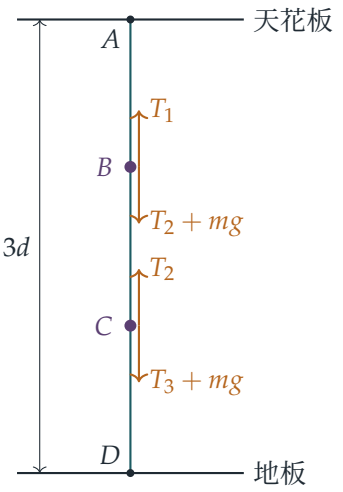
解答

模型

各弦線為輕質彈性弦線（light elastic string），拉長時遵從虎克定律（張力 $= \lambda \times$ 伸長量 $/a$）；各質點靜止不動。設 T_1、T_2、T_3 為 AB、BC、CD 的張力（tension），x_1、x_2、x_3 為它們的伸長量（extension），於是 $T_i = \lambda x_i / a$。為方便起見，我們給單靠重量 mg 所產生的伸長量起一個名字：

$$e = \frac{mga}{\lambda}.$$

我們先假設三條弦線全部拉緊（taut），稍後再檢查這在甚麼情況下成立。設 y_B、y_C 為由地板量起的高度。



B 和 C 的高度

對每個質點沿鉛垂方向分解力（上方的弦線向上拉，下方的弦線和重量向下拉）：

$$B: \quad T_1 = T_2 + mg, \qquad C: \quad T_2 = T_3 + mg.$$

兩式除以 λ/a，便成為關於伸長量的關係式：

$$x_1 = x_2 + e, \qquad x_2 = x_3 + e, \qquad \text{所以} \qquad x_2 = x_3 + e, \quad x_1 = x_3 + 2e.$$

三條弦線的總長度就是房間的高度：

$$3a + x_1 + x_2 + x_3 = 3d \quad \Longrightarrow \quad 3x_3 + 3e = 3d - 3a \quad \Longrightarrow \quad x_3 = d - a - e.$$

於是 $x_2 = d - a$，$x_1 = d - a + e$。由下方各弦線的長度即可求得高度：

$$y_C = CD = a + x_3 = d - e = d - \frac{mga}{\lambda},$$
$$y_B = y_C + BC = (d - e) + (a + d - a) = 2d - \frac{mga}{\lambda}.$$

用 AB 驗算一下：$3d - y_B = d + e = a + x_1$，正如所料。

想一想 這些答案究竟在甚麼情況下才成立？

我們假設了每條弦線都拉緊，所以每個伸長量都必須至少為零。最嚴格的條件落在最低的弦線上：$x_3 \geq 0$，即

$$\frac{mga}{\lambda} \leq d - a.$$

（這時 $x_2 = d - a \geq 0$ 和 $x_1 > 0$ 自動成立。）CD 最先鬆弛（slack）是合理的：它不用支撐任何東西，只是靠房間把弦線拉開才保持拉緊。若 $mga/\lambda > d - a$，弦線 CD 便

會鬆弛，整個系統只不過是兩個質點懸掛在 A 之下：這時 $T_2 = mg$，$T_1 = 2mg$，所以 $AB = a + 2e$，$BC = a + e$，從而 $y_B = 3d - a - 2e$，$y_C = 3d - 2a - 3e$，前提是這個位置仍在地板之上。題目所指的是所有弦線都拉緊的主要情況。

何時可以有 $CD = a$？

弦線 CD 的長度等於其自然長度 (natural length)，當且僅當它剛好拉緊而沒有張力，即 $T_3 = 0$，亦即 $x_3 = 0$。這正是上述兩種情況的分界，而用任何一組公式都可得

$$y_C = a \iff d - \frac{mga}{\lambda} = a \iff m = \frac{\lambda(d-a)}{ga}.$$

從物理上看，這時位於 C 的質點完全由 BC 支撐，$T_2 = mg$，而 $T_1 = 2mg$。

合適的質量存在，當且僅當這個 m 的值為正數，這需要 $d > a$。反過來說，若 $d \le a$，則沒有任何正數 m 可行：假如所有弦線都拉緊，我們便需要 $x_2 = d - a \ge 0$ 和 $x_3 = d - a - e < 0$，這是不可能的，所以 CD 鬆弛，C 懸於高度 $3d - 2a - 3e < 3a - 2a = a$（或停在地板上），因此 $CD < a$。故所求的值的集合為

$$\{\, d : d > a \,\}.$$

對這樣的 d，我們得到 $y_C = a$，$y_B = d + a$ 和 $AB = 2d - a$。

驗算

- 單位：mga/λ 是力乘以長度再除以力，所以是長度；它要從 d 中減去，理應如此。
- 當 $m = 0$ 時，三條弦線平均分擔伸長：每條的長度都是 d，C 位於 d，B 位於 $2d$。加上質量後，兩個質點都下降相同的距離 e，因為 BC 的伸長量保持為 $d - a$。
- 數值上，對 250 組隨機選取的 a、λ、d、m，在 $0 \le y_C \le y_B \le 3d$ 的範圍內求位能 (potential energy) 的最小值（重力位能加彈性位能，並容許弦線鬆弛），所得高度在拉緊和 CD 鬆弛兩種情況下都與上述結果吻合，誤差在 10^{-14} 以內。取 $a = 1$、$\lambda = 10$、$d = 2$ 和 $m = \lambda(d-a)/(ga) \approx 1.020$，得出 $CD = 1.000000$ 和 $y_B = 3.000000$；當 $d \le a$ 時，沒有任何正數 m 能使 $CD = a$。

常見錯誤

- 把張力寫成 $\lambda\times$（拉長後的長度）$/a$，而不是 $\lambda\times$ 伸長量 $/a$。
- 忘記總長度由房間決定：沒有 $\sum(a + x_i) = 3d$，單靠平衡方程並不能確定各伸長量。
- 假設每條弦線都必定有張力。弦線是可以鬆弛的，而 $CD = a$ 恰好發生在鬆弛的分界上。

STEP 之外

這是一個小型的靜不定結構(statically indeterminate structure)：單靠質點的平衡並不能確定各張力，我們還需要一個相容條件（compatibility condition，即各長度之和固定）。同一個想法寫成矩陣形式，就是工程師分析由彈簧和桿件組成的構架的方法。另一個切入點是求總位能的最小值，上面的數值驗算正是這樣做的；這種變分（variational）觀點在往後的力學中佔有核心地位。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對彈簧、平衡和位能有仔細的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。