詳細解答

STEP I 1992，第 10 題

力學 • 反衝與動量

> **STEP I 1992，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q10

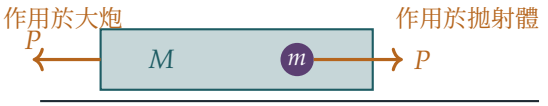
關鍵思路

力 P 把拋射體(projectile)向前推，但根據牛頓第三定律(Newton's third law)，拋射體同時以同樣大小的力 P 把大炮向後推，而水平方向上沒有任何東西阻止大炮後座（recoil）。因此，拋射體在炮管內時，相對於地面走過的距離並不是 l：它是相對於大炮走過了 l。兩個物體的加速度都是常數，所以最簡潔的做法是考慮相對運動（relative motion）。

解答

模型

我們把拋射體和大炮都看成沿同一條水平直線運動的質點（particle），把地面看成光滑（大炮可「自由滑動」），並把拋射體與炮管之間沿炮管方向的力看成常數 P。在鉛垂方向上，重量與法向反作用力（normal reaction）互相平衡（地面作用於大炮，炮管作用於拋射體），所以它們對水平運動沒有影響。取發射方向為正方向。



兩個加速度

拋射體在炮管內時，它所受的唯一水平力是向前的 P，而大炮所受的唯一水平力是向後的反作用力 P（牛頓第三定律；地面光滑）。根據牛頓第二定律（Newton's second law），兩者的加速度為

$$a_{\text{proj}} = \frac{P}{m}, \qquad a_{\text{cannon}} = -\frac{P}{M}.$$

兩者都是常數，而且兩個物體都由靜止開始運動。

想一想 拋射體在多長的距離內加速：是 l，還是別的距離？

炮管的長度是 l，但炮管本身在向後移動。當拋射體相對於大炮的位移（displacement）達到 l 時，它便離開炮管。相對於大炮，拋射體由靜止開始運動，其加速度為常數

$$a_{\text{rel}} = \frac{P}{m} - \left(-\frac{P}{M}\right) = \frac{P}{m} + \frac{P}{M} = \frac{P(M+m)}{mM}.$$

在炮管內的時間

對相對運動使用 $s = \frac{1}{2}at^2$，拋射體在時刻 T 離開炮管，其中

$$l = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(M+m)}{mM} T^2, \qquad \text{所以} \qquad T^2 = \frac{2mMl}{P(M+m)}.$$

出口速率

相對於地面，拋射體由靜止開始以恆加速度 P/m 運動，所以在時刻 T 它的速率 v 滿足

$$\begin{aligned} v^2 = \left(\frac{P}{m}T\right)^2 &= \frac{P^2}{m^2} \cdot \frac{2mMl}{P(M+m)} \\ &= \frac{2PMl}{m(M+m)}. \end{aligned}$$

由於 $v > 0$，

$$v = \sqrt{\frac{2PMl}{m(M+m)}},$$

這正是所求的結果。

另一途徑：能量與動量

利用守恆定律（conservation laws）也可得到同一答案。水平方向上沒有外力，所以水平動量(momentum)守恆：若拋射體離開炮管的一刻大炮向後的速率為 V，則 $mv = MV$。若拋射體在炮管內的期間，拋射體向前移動了 x，大炮向後移動了 X，則 $x + X = l$。作用於拋射體的力所作的功（work）為 Px，而作用於大炮的反作用力與大炮的運動方向相同，所作的功為 PX；兩者合共作功 $P(x+X) = Pl$。因此

$$Pl = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}M\left(\frac{mv}{M}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mv^2\,\frac{M+m}{M},$$

由此同樣得到 $v^2 = \dfrac{2PMl}{m(M+m)}$。

驗算

- 重型大炮：當 $M \to \infty$ 時，因子 $M/(M+m) \to 1$，而 $v \to \sqrt{2Pl/m}$，即大炮固定不動時的速率（所作的功 Pl 全部歸於拋射體）。大炮後座時，所得的速率總會略小一些，這是理所當然的，因為部分能量用於後座。
- 單位：Pl 是能量，而 Pl/m 的單位是 $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$，所以 v 是速率。
- 數值：取 $m = 0.1$、$M = 0.9$、$P = 9$ 及 $l = 0.5$（國際單位制，SI units），公式給出 $v = 9\,\mathrm{m\,s}^{-1}$，而大炮以 $1\,\mathrm{m\,s}^{-1}$ 後座。於是動量為 $0.1 \times 9 = 0.9 \times 1$，動能（kinetic energy）為 $4.05 + 0.45 = 4.5 = Pl$。對兩個物體作逐步數值模擬，在兩者的相對位移達到 l 時停止，所得結果在 m、M、P 和 l 取多組隨機數值時均與公式吻合。

常見錯誤

- 使用 $v^2 = 2(P/m)l$，即把 l 當作拋射體相對於地面走過的距離，忽略了後座。
- 忘記牛頓第三定律，讓大炮保持靜止；大炮可自由滑動，所以必定後座。
- 使用能量方法時，只把所作的功取為 P 乘以拋射體相對於地面的位移；其實作用於大炮的反作用力也有作功。

STEP 之外

這是一個二體問題（two-body problem），而相對加速度 $P(M+m)/(mM)$ 正是 P 除以約化質量（reduced mass）$\mu = mM/(m+M)$。任何兩個只與對方相互作用的物體，彼此之間的相對運動都如同一個質量為 μ 的單一物體；同一想法可用來處理行星軌道、雙星和粒子碰撞，也是火箭問題和後座問題的基礎。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對這裏的約化質量和動量兩方面的想法都有詳細闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。