詳細解答

STEP I 1992，第 1 題

純數學 • 模 7 的日曆算術

> **STEP I 1992，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q1

關鍵思路

星期每 7 日循環一次，所以我們只需要知道兩個日期之間相隔多少日，再取模（modulo）7 的餘數。令計算變得輕鬆的竅門是 $365 = 52 \times 7 + 1$：平年會令星期向後移一日，閏年（leap year）則移兩日。因此我們先數整年和閏日，最後才處理餘下的零碎月份。所謂「仔細」，是指要準確判斷哪些 2 月 29 日真正落在這段期間之內，並留意那個可能令我們出錯的世紀年。

解答

我們把 1905 年 4 月 3 日至 1992 年 6 月 26 日這段期間分成兩段：

$$1905\text{ 年 }4\text{ 月 }3\text{ 日} \longrightarrow 1992\text{ 年 }4\text{ 月 }3\text{ 日} \longrightarrow 1992\text{ 年 }6\text{ 月 }26\text{ 日}.$$

整年：1905 年 4 月 3 日至 1992 年 4 月 3 日

這段時間共有 $1992 - 1905 = 87$ 個整年。每個這樣的年份（由 4 月 3 日至下一個 4 月 3 日）有 365 日，若當中包含一個 2 月 29 日，則多加一日。

哪些 2 月 29 日落在 1905 年 4 月 3 日與 1992 年 4 月 3 日之間？這個範圍內的閏年就是可被 4 整除的年份，即

$$1908,\ 1912,\ \ldots,\ 1988,\ 1992.$$

1904 年的 2 月 29 日在 1905 年 4 月 3 日之前，所以不計算在內；1992 年的 2 月 29 日在 1992 年 4 月 3 日之前，所以要計算在內。於是共有

$$\frac{1992 - 1908}{4} + 1 = 21 + 1 = 22$$

個閏日。

> **想一想** 這個範圍內每個可被 4 整除的年份，真的都是閏年嗎？

在格里曆（Gregorian calendar）中，世紀年只有在可被 400 整除時才是閏年，所以 1900 年不是閏年（而 2000 年是）。不過這兩個年份都不在我們的期間之內，所以簡單的「可被 4 整除」法則（即口訣中的那一條）在這裏完全正確。假如題目追溯到 1900 年之前，我們便要剔除 1900 年 2 月 29 日。

因此，由 1905 年 4 月 3 日至 1992 年 4 月 3 日的日數是

$$87 \times 365 + 22 = 31\,755 + 22 = 31\,777.$$

以模 7 計算會更快：由於 $365 \equiv 1 \pmod 7$，這個數等於

$$87 + 22 = 109 = 15 \times 7 + 4 \equiv 4 \pmod 7.$$

零碎月份：1992 年 4 月 3 日至 1992 年 6 月 26 日

根據口訣，四月有 30 日，五月有 31 日，所以

$$\begin{aligned} &4 \text{ 月 } 3 \text{ 日} \to 5 \text{ 月 } 3 \text{ 日} : 30 \text{ 日}, \\ &5 \text{ 月 } 3 \text{ 日} \to 6 \text{ 月 } 3 \text{ 日} : 31 \text{ 日}, \\ &6 \text{ 月 } 3 \text{ 日} \to 6 \text{ 月 } 26 \text{ 日} : 23 \text{ 日}, \end{aligned}$$

合共 $30 + 31 + 23 = 84 = 12 \times 7$ 日，即 $\equiv 0 \pmod 7$。可喜的是，1992 年 4 月 3 日與 1992 年 6 月 26 日恰好是同一個星期幾。

綜合結果

總相隔日數為

$$31\,777 + 84 = 31\,861 = 4551 \times 7 + 4 \text{ 日},$$

所以 1905 年 4 月 3 日在星期的次序上比 1992 年 6 月 26 日早 4 日。由星期五倒數四日：星期四、星期三、星期二、星期一。因此

$$1905 \text{ 年 } 4 \text{ 月 } 3 \text{ 日是星期一。}$$

驗算

- 用電腦逐月直接計算兩個日期之間的日數，得出 31 861 日，即 $4 \pmod 7$；電腦日曆亦顯示 1905 年 4 月 3 日是星期一（而 1992 年 6 月 26 日是星期五）。

- 檢查方向是否合理：由星期一向前數 4 日得到星期五，正如所料。
- 用另一個方法核對閏日數目：87 年大約包含 $87/4 \approx 21.75$ 個閏日，所以 22 大致正確。

常見錯誤

- 把 1904 年 2 月 29 日（在起始日期之前）計算在內，或漏掉 1992 年 2 月 29 日（在結束日期之前）：兩者都會令答案相差一日。
- 應該向前數時倒數，或應該倒數時向前數：餘數 4 表示在星期的循環中，1905 年那一天是在星期五之前四日，而不是之後。
- 把這個方法推廣到更早的日期時，將 1900 年當作閏年。

STEP 之外

這就是模 7 的算術：關鍵事實 $365 \equiv 1 \pmod 7$ 把一個龐大的數目化為一個細小的數目。同餘（congruence），以及它在曆法謎題中的應用，例如用來求任何日期是星期幾的蔡勒公式（Zeller's congruence），都是數論（number theory）入門課程的標準內容。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（數論入門名著）是一本介紹同餘及其他眾多課題的佳作。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。