詳細解答

STEP III 1991，第 9 題

純數學 • 橢圓的弧長

> **STEP III 1991，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q9

關鍵思路

E_1 是以中心為原點的橢圓（ellipse）方程，而 E_2 是同一條曲線的極坐標（polar）形式，極點位於一個焦點（focus）。把 E_2 化為直角坐標（Cartesian）形式再配方（completing the square），便可看出它的中心和軸在哪裏；比較兩者的半軸（semi-axes）即可求得 k 和 b。至於積分，周界（perimeter）只是一個數，但每一種參數化（parametrisation）都會給出外表不同的弧長（arc length）積分。

解答

坐標軸、k 和 b

以 (x,y) 表示 E_2 的坐標，並設 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=\theta_2$。於是 E_2 即 $r=\dfrac{k}{1+e\cos\theta}$，亦即 $r+e\,r\cos\theta=k$，所以

$$r=k-ex.$$

兩邊平方（這一步沒有損失任何資料，因為在曲線上 $r=k/(1+e\cos\theta)>0$），

$$x^2+y^2=k^2-2kex+e^2x^2 \quad\Longrightarrow\quad (1-e^2)x^2+2kex+y^2=k^2.$$

對 x 配方：

$$(1-e^2)\left(x+\frac{ke}{1-e^2}\right)^2+y^2=k^2+\frac{k^2e^2}{1-e^2}=\frac{k^2}{1-e^2},$$

所以

$$\frac{(x+\frac{ke}{1-e^2})^2}{k^2/(1-e^2)^2}+\frac{y^2}{k^2/(1-e^2)}=1.$$

這是一個橢圓，在 E_2 坐標軸下中心為 $(-\frac{ke}{1-e^2}, 0)$，對稱軸與 E_2 的坐標軸平行，半軸為

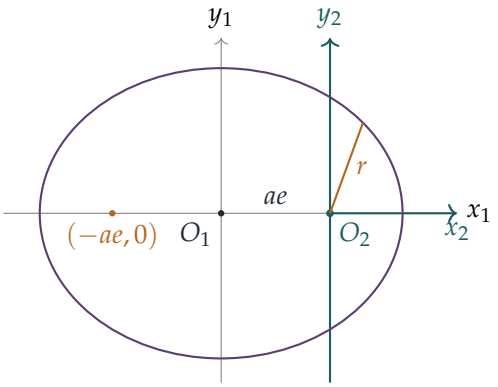
$$A = \frac{k}{1-e^2}\text{（沿 } x \text{ 方向）}, \qquad B = \frac{k}{\sqrt{1-e^2}}\text{（沿 } y \text{ 方向）}.$$

由於 $0 < 1-e^2 < 1$，我們有 $A > B$，所以長軸（major axis）位於 E_2 的 x 軸上。對於 E_1，$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 且 $a > b$，所以它的長軸位於 E_1 的 x 軸上。兩條曲線是同一條曲線，所以半長軸相等，半短軸也相等：

$$a = \frac{k}{1-e^2}, \quad \text{即} \quad k = a(1-e^2), \qquad b^2 = \frac{k^2}{1-e^2} = \frac{a^2(1-e^2)^2}{1-e^2} = a^2(1-e^2),$$

這正是所需的兩個結果。

中心（即 E_1 的原點）位於 E_2 的 x 軸上 $x = -\frac{ke}{1-e^2} = -ae$ 之處。所以 E_2 的坐標軸就是把 E_1 的坐標軸沿長軸平移距離 ae 而得：E_2 的原點是 E_1 中的點 $(ae, 0)$，而由於 $a^2 - b^2 = a^2e^2$，這一點正是焦點。兩條 x 軸位於同一條直線（長軸）上，兩條 y 軸互相平行；以 E_1 的坐標表示，$x_1 = x_2 + ae$，$y_1 = y_2$。橢圓對它的兩條軸都對稱，所以我們同樣可以把 E_2 的原點取在另一個焦點 $(-ae, 0)$，並把 x 軸反向。無論哪一種取法，$\theta_2 = 0$ 所對應的點都是最接近該焦點的頂點（vertex）。



兩個積分

我們用兩種方法計算橢圓上半部分（$y \geq 0$）的長度。

利用 E_1。當 θ_1 由 0 變到 π 時，動點剛好走遍上半部分一次。由 $\dot{x} = -a\sin\theta_1$，$\dot{y} = b\cos\theta_1$，

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\sin^2\theta_1 + b^2\cos^2\theta_1 = a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\theta_1 = a^2\left(1 - e^2\cos^2\theta_1\right),$$

其中用到 $a^2 - b^2 = a^2e^2$。所以半周界為

$$\tfrac{1}{2}P = a\int_0^{\pi} \sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

利用 E_2。這裏由於 $r>0$，$y_2 = r\sin\theta_2 \geq 0$ 當且僅當 $0 \leq \theta_2 \leq \pi$。所以 $\theta_2 \in [0,\pi]$ 同樣剛好描出上半部分一次。在極坐標中，$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$。由 $r = k(1+e\cos\theta)^{-1}$，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{ke\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2},$$

所以

$$r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{k^2\left[(1+e\cos\theta)^2 + e^2\sin^2\theta\right]}{(1+e\cos\theta)^4} = \frac{k^2\left(1+e^2+2e\cos\theta\right)}{(1+e\cos\theta)^4}.$$

因此，利用 $k = a(1-e^2)$，

$$\tfrac{1}{2}P = a(1-e^2)\int_0^\pi \frac{\sqrt{1+e^2+2e\cos\theta}}{(1+e\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

令 $\frac{1}{2}P$ 的兩個表達式相等，再除以 $a>0$，便得到所需的恆等式（identity）。

想一想 為甚麼兩個參數都必須取遍 $[0,\pi]$，而不是其中一個取另一個範圍？

兩個弧長必須是同一段曲線的長度。θ_1 和 θ_2 是不同的角（一個是從中心量度的離心角（eccentric angle），另一個是從焦點量度的極角），但兩者在 $[0,\pi]$ 上都是由右頂點 $(a,0)$ 到左頂點 $(-a,0)$ 掃過上半部分。所以兩個積分量度的是同一段弧。

近似值

由於 $0 \leq e^2\cos^2\theta < 1$，二項級數（binomial series）適用：

$$\sqrt{1-u} = 1 - \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 + O(u^3), \qquad u = e^2\cos^2\theta.$$

$O(u^3)$ 項是 $O(e^6)$，我們把它略去。利用

$$\int_0^\pi \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{8}$$

（第二個由 $\cos^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$ 得出），我們得到

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta &\approx \pi - \frac{e^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{e^4}{8}\cdot\frac{3\pi}{8} = \pi\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64}\right)\\ &= \tfrac{1}{64}\pi\left(64 - 16e^2 - 3e^4\right).\end{aligned}$$

根據剛證明的恆等式，第二個積分的值相同。至此全題完成。

驗算

▶ 當 $e=0$ 時，兩個積分都等於 π，而 E_2 變成圓 $r=k$，其中 $k=a$：正確。

- 取 $a = 2$，$b = 1$（所以 $e^2 = \frac{3}{4}$），用一個 200 000 邊形計算，得周界為 9.6884482，與 $2a$ 乘以第一個積分的值吻合。
- 數值上，當 $e = 0.2$ 時兩個積分都是 3.1099371，而近似式給出 3.1099411。兩者之差約為 $-0.063e^6$，與級數的下一項 $-\frac{5\pi}{256}e^6 \approx -0.061e^6$ 相符。

常見錯誤

- 把 E_2 的原點放在中心。分母為 $1 + e\cos\theta$ 的極坐標形式，極點必定在焦點。
- 在極坐標弧長公式中漏掉 $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^2$ 一項，或者一邊在 $[0, 2\pi]$ 上積分，另一邊卻在 $[0, \pi]$ 上積分。

STEP 之外

積分 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$ 是第二類完全橢圓積分（complete elliptic integral of the second kind）$E(e)$，所以橢圓的周界是 $4aE(e)$。它不能用初等函數（elementary functions）表示，這正是本題這類級數（以及拉馬努金（Ramanujan）那些準確得驚人的近似公式）之所以重要的原因。由橢圓積分再走下去，便是橢圓函數（elliptic functions）和橢圓曲線（elliptic curves），後者是現代數論的核心課題。想做更多這種風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。