詳細解答

STEP III 1991，第 8 題

純數學 • 歸約公式與求和

STEP III 1991，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/91-s3-q8

關鍵思路

第 (i) 部分是一條歸約公式（reduction formula），所以分部積分法（integration by parts）自然是第一步。餘下的被積函數（integrand）含有 $\sin x \sin kx$，而 $\cos(k-1)x$ 的複角公式（compound-angle formula）可把它變回同一族的積分。第 (ii) 部分是 $(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^m$ 的二項展開式（binomial expansion）的實部（real part）。第 (iii) 部分則是把 (ii) 積分，再以裂項相消（telescoping）的方法把 (i) 的遞推關係（recurrence）逐層展開而得出。

解答

第 (i) 部分

取 $k \geq 1$，並以 $u = \cos^k x$ 和 $\mathrm{d}v = \cos kx\,\mathrm{d}x$ 作分部積分，於是 $v = \frac{1}{k}\sin kx$ 及 $\mathrm{d}u = -k\cos^{k-1}x \sin x\,\mathrm{d}x$：

$$\begin{aligned} I_k &= \left[\tfrac{1}{k}\cos^k x \sin kx\right]_0^\theta + \int_0^\theta \cos^{k-1} x\, \sin x\, \sin kx\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{k}\cos^k\theta \sin k\theta + \int_0^\theta \cos^{k-1} x\, \sin x\, \sin kx\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

因為方括號內的式子在 $x = 0$ 時等於零。

? **想一想** 怎樣把 $\sin x \sin kx$ 改寫成 x 的倍數的餘弦？

把 $(k-1)x = kx - x$ 代入複角公式，得

$$\cos(k-1)x = \cos kx \cos x + \sin kx \sin x,$$

所以

$$\sin x \sin kx = \cos(k-1)x - \cos x \cos kx.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^\theta \cos^{k-1} x \, \sin x \, \sin kx \, \mathrm{d}x &= \int_0^\theta \cos^{k-1} x \cos(k-1)x \, \mathrm{d}x \\ &\quad - \int_0^\theta \cos^k x \cos kx \, \mathrm{d}x \\ &= I_{k-1} - I_k.\end{aligned}$$

代回原式並乘以 k，

$$kI_k = \cos^k \theta \sin k\theta + kI_{k-1} - kI_k,$$

即

$$2kI_k = kI_{k-1} + \cos^k \theta \sin k\theta,$$

這正是所要證明的結果。

第 (ii) 部分

設 $z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$。根據二項式定理（binomial theorem），

$$\begin{aligned}(1+z)^m &= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} z^r \\ &= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} (\cos 2r\theta + \mathrm{i} \sin 2r\theta).\end{aligned}$$

現在把「半角」抽出來：

$$1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 2\cos\theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

所以

$$(1+z)^m = 2^m \cos^m \theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} = 2^m \cos^m \theta \, (\cos m\theta + \mathrm{i} \sin m\theta).$$

由於 $2^m \cos^m \theta$ 是實數，比較兩個表達式的實部，得

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \cos 2r\theta = 2^m \cos^m \theta \cos m\theta,$$

這就是所求的恆等式（$r = 0$ 和 $r = m$ 兩項分別是 1 和 $\cos 2m\theta$）。

第 (iii) 部分

把第一個表達式記作 S。(ii) 的右邊是 I_m 的被積函數的 2^m 倍，所以我們把 (ii) 由 0 積分至 θ。$r = 0$ 一項積分後得 θ，而當 $r \geq 1$ 時，$\int_0^\theta \cos 2rx \, \mathrm{d}x = \frac{\sin 2r\theta}{2r}$。因此

$$\theta + \sum_{r=1}^{m} \binom{m}{r} \frac{\sin 2r\theta}{2r} = 2^m I_m, \qquad \text{所以} \qquad S = 2^m I_m - \theta.$$

現在利用 (i) 計算 $2^m I_m$。把遞推關係除以 $2k$ 再乘以 2^k，對 $k \geq 1$ 得

$$2^k I_k = 2^{k-1} I_{k-1} + \frac{2^{k-1}}{k} \cos^k \theta \sin k\theta.$$

想一想 為甚麼要乘以 2^k？

若寫成 $I_k = \frac{1}{2} I_{k-1} + \ldots$，遞推關係每一步都帶有因子 $\frac{1}{2}$。改用 $J_k = 2^k I_k$ 便可把它消去：這樣 $J_k - J_{k-1}$ 就是一個簡單的顯式項，而求和時會裂項相消。把 $k = 1, 2, \ldots, m$ 的各條等式相加，中間各項互相抵消：

$$2^m I_m = 2^0 I_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{2^{k-1}}{k} \cos^k \theta \sin k\theta.$$

最後，$I_0 = \int_0^\theta 1 \, \mathrm{d}x = \theta$，所以

$$\begin{aligned} S = 2^m I_m - \theta &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} 2^{k-1} \cos^k \theta \sin k\theta \\ &= \cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta \sin 2\theta + \cdots + \frac{1}{m} 2^{m-1} \cos^m \theta \sin m\theta, \end{aligned}$$

這就是所求的結果。

驗算

- $m = 1$：所要證明的是 $\frac{1}{2} \sin 2\theta = \cos\theta \sin\theta$，這正是二倍角公式（double-angle formula）。
- $m = 2$：左邊是 $\sin 2\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta$，而右邊是 $\cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta \sin 2\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \cos 2\theta)$，兩者相同，因為 $\sin 2\theta \cos 2\theta = \frac{1}{2} \sin 4\theta$。
- 數值上，取 $m = 5$ 和 $\theta = 0.7$，兩個表達式都等於 1.51963（準確至小數點後 5 位）。對隨機選取的 k 和 θ，歸約公式亦與用辛普森法則（Simpson's rule）算出的 I_k 值吻合。

常見錯誤

- 分部積分時弄錯正負號：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos^k x = -k \cos^{k-1} x \sin x$，而這個負號會與 $\int v \, \mathrm{d}u$ 前面的負號互相抵消。
- 忘記 (ii) 中 $r = 0$ 的一項。它積分後得 θ，並與裂項求和最底端的 $I_0 = \theta$ 互相抵消。

STEP 之外

把 $\cos^m\theta\cos m\theta$ 寫成 $\cos 2r\theta$ 的組合，其實就是計算一個傅立葉級數（Fourier series）。這裏的級數只有有限項，而逐項積分正是大學一年級數學方法課程中處理傅立葉級數的做法。(i) 中那類歸約公式，也是處理 $\int \cos^n x\,\mathrm{d}x$ 這種形式的積分以及沃利斯乘積（Wallis product）的標準工具。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 為 (ii) 中用到的技巧 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}=2\cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 提供了一幅幾何圖像。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。