詳細解答

STEP III 1991，第 7 題

純數學 • 利用對稱性積分

STEP III 1991，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/91-s3-q7

關鍵思路

$\ln(\sin x)$ 的積分無法透過原函數（antiderivative）求出，但對稱性（symmetry）足以解決一切。代換（substitution）$x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$ 會把 sin 與 cos 互換，而 $x \mapsto \pi - x$ 則說明 $\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的取值，正是它在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上的取值重複兩次。再寫出 $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$，便得到一條未知積分必須滿足的方程。第 (iii) 部分是一次分部積分（integration by parts），把 $x \cot x$ 化為 $\ln(\sin x)$，而第 (ii) 部分則用來處理邊界項（boundary term）。

解答

全題記

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

第 (i) 部分

正弦與餘弦的積分相等。代入 $x = \frac{1}{2}\pi - t$，則 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ 且 $\sin x = \cos t$。積分上下限 $0, \frac{1}{2}\pi$ 變成 $\frac{1}{2}\pi, 0$，而負號又把它們調換回來：

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \ln(\cos t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t.$$

與 $\sin 2x$ 的關係。把這兩個相等的積分相加，並利用 $\ln a + \ln b = \ln(ab)$（由於在開區間

上 $\sin x, \cos x > 0$，此式成立）：

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x \cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\tfrac{1}{2}\sin 2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}\pi \ln 2. \end{aligned}$$

兩邊除以二，得 $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\pi \ln 2$，第一串等式至此證畢。

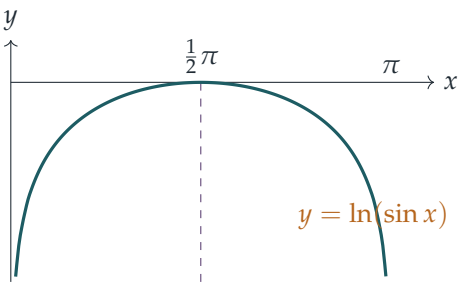
第二串等式。設 $u = 2x$，則 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$，而積分上下限變成 0 和 π：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u.$$

現在把 $[0, \pi]$ 在 $\frac{1}{2}\pi$ 處分成兩段。在後半段代入 $u = \pi - v$。由於 $\sin(\pi - v) = \sin v$，而積分上下限 $\frac{1}{2}\pi, \pi$ 變成 $\frac{1}{2}\pi, 0$，

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin v)\,\mathrm{d}v = I.$$

下圖顯示了這種對稱性：曲線 $y = \ln(\sin x)$ 關於 $x = \frac{1}{2}\pi$ 對稱。



所以 $\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = 2I$，因此

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(2I) = I,$$

正如所求。

計算 I。把第二個結果代入第一個結果，得

$$I = \tfrac{1}{2}I - \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\pi \ln 2.$$

這一步需要 I 是一個有限的數，這正是題目容許我們假設積分收斂（convergence）的原因。若沒有這個假設，「$I = \frac{1}{2}I + c$」甚麼也證明不了。

第 (ii) 部分

設 $x \geq 1$，並取 $u = \sqrt{x}$。則 $u \geq 1$，所以題目給出的不等式適用：

$$\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}, \qquad \text{即} \qquad \tfrac{1}{2} \ln x < \sqrt{x}.$$

第一個極限（limit）。當 $x \geq 1$ 時，我們有 $\ln x \geq 0$，而把 $\ln x < 2\sqrt{x}$ 除以 $x > 0$ 可得

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

當 $x \to \infty$ 時，右邊趨向 0，所以根據夾逼原理（squeeze principle，又稱 sandwich principle），$\dfrac{\ln x}{x} \to 0$。

第二個極限。當 $0 < x < 1$ 時，設 $x = 1/t$，則 $t > 1$，且當 $x \to 0^+$ 時 $t \to \infty$。於是根據第一個極限，

$$x \ln x = \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} = -\frac{\ln t}{t} \to 0$$

。所以當 $x \to 0$（只取正值）時，$x \ln x \to 0$。

第 (iii) 部分

首先留意被積函數（integrand）在 0 處並無問題：$x \cot x = \dfrac{x}{\sin x} \cos x \to 1$。由於在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上 $\cot x$ 是 $\ln(\sin x)$ 的導數，我們取 $u = x$ 和 $\mathrm{d}v = \cot x \, \mathrm{d}x$，$v = \ln(\sin x)$ 作分部積分。對數在 0 處趨向無窮，所以我們先在 $[\varepsilon, \frac{1}{2}\pi]$ 上計算，然後令 $\varepsilon \to 0^+$：

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x = \Big[x \ln(\sin x) \Big]_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi} - \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x) \, \mathrm{d}x.$$

在上限處，$\ln(\sin \frac{1}{2}\pi) = \ln 1 = 0$。所以邊界項只剩下 $-\varepsilon \ln(\sin \varepsilon)$。

> ? **想一想** 為甚麼 $\varepsilon \ln(\sin \varepsilon)$ 趨向 0？第 (ii) 部分討論的是 $x \ln x$，而不是 $x \ln(\sin x)$。

記 $s = \sin \varepsilon$，當 $\varepsilon \to 0^+$ 時，它取正值而趨向 0。於是

$$\varepsilon \ln(\sin \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \cdot s \ln s.$$

第一個因子趨向 1（即標準極限 $\sin \varepsilon / \varepsilon \to 1$），而根據第 (ii) 部分，$s \ln s \to 0$。所以邊界項趨向 0。

令 $\varepsilon \to 0^+$，並利用第 (i) 部分：

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x = 0 - I = \tfrac{1}{2}\pi \ln 2.$$

驗算

- 正負號：在該區間上 $\ln(\sin x) \le 0$，所以 I 必為負數，而 $-\frac{1}{2}\pi \ln 2 \approx -1.0888$ 的確是負數。另一方面，在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上 $x\cot x > 0$，而我們的答案是正數。
- 大小：$x\cot x$ 在長度為 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.571$ 的區間上由 1 下降至 0，所以積分值約為 1.09 是合理的。
- 數值上，以中點求積法（midpoint quadrature）計算可得 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\cot x\,\mathrm{d}x \approx 1.0887930$，與 $\frac{1}{2}\pi\ln 2 = 1.0887930\ldots$ 吻合，並且 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x \approx -1.08879$。

常見錯誤

- 轉換為 $u = 2x$ 時，漏掉由 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$ 而來的因子 $\frac{1}{2}$，結果得出 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = 2I$，之後便無從入手。
- 在第 (iii) 部分，直接寫 $[x\ln(\sin x)]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 0$，卻沒有論證在 0 處的極限。第 (ii) 部分正是為了求這個極限而設。

STEP 之外

這裏的兩個積分都是*瑕積分*（improper integral）：它們的被積函數，或所用的原函數，在某個端點處無界。這類積分是以極限來定義的，正如我們利用 ε 所做的那樣。大學第一門分析（analysis）課程會把這一點嚴格化，並給出判別這類極限何時存在的方法。題目中「可假設」那一句的背後，正是這些判別法。同樣的對稱技巧還可以求出許多其他積分，例如 $\int_0^{\pi/2} \ln(\tan x)\,\mathrm{d}x = 0$。Abbott 的 *Understanding Analysis* 講述了支撐這一切的極限與積分理論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。