詳細解答

STEP III 1991，第 6 題

純數學 • 雙曲線性變換

> **STEP III 1991，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q6

本題在 *Beyond STEP* 第 7.6 節雙曲旋轉與相對論中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/hyperbolic-rotations.html

關鍵思路

這個矩陣(matrix)的表現與旋轉矩陣(rotation matrix)相似，只是以雙曲函數(hyperbolic functions) 取代了圓函數，而恆等式 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ 以及 cosh 和 sinh 的加法公式（addition formulae）就足以完成全部工作。把斜率（gradient）為 $\tanh v$ 的方向寫成向量 $(\cosh v, \sinh v)$，T 對斜率的作用便一目了然：它只是把 u 加到「雙曲角」v 上。至於夾角的條件，我們把兩條直線夾角的正切用 v_1 和 v_2 表示，再看看甚麼必須保持不變。

解答

全篇記 $c = \cosh u$ 及 $s = \sinh u$，於是 $c^2 - s^2 = 1$，而且因為 $u > 0$，所以 $s > 0$。這個變換（transformation）是

$$x' = cx + sy, \qquad y' = sx + cy.$$

雙曲線

對任意一點，

$$\begin{aligned} x'^2 - y'^2 &= (cx + sy)^2 - (sx + cy)^2 \\ &= (c^2 - s^2)x^2 + 2csxy - 2csxy - (c^2 - s^2)y^2 \\ &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

所以 T 保持 $x^2 - y^2$ 不變，而 $x^2 - y^2 = 1$ 上的每一點都被送到 $x^2 - y^2 = 1$ 上的一點。整條曲線都被完全覆蓋，而不僅是被映射到自身之內：把 u 換成 $-u$ 所得的矩陣是 T 的逆矩陣（inverse）（乘開並利用 $c^2 - s^2 = 1$ 即可），而它同樣保持 $x^2 - y^2$ 不變。所以雙曲線（hyperbola）上的每一點都是雙曲線上某一點的像（image）。這條曲線變換為自身。

（事實上每一支都變換為自身：若 $x \geq 1$，則 $|y| < x$，所以 $x' = cx + sy > (c - s)x = \mathrm{e}^{-u}x > 0$。）

通過原點的不變直線

由於 T 是線性(linear)的，它把原點送到原點，並把通過原點、方向為 $\mathbf{d}$ 的直線送到通過原點、方向為 $T\mathbf{d}$ 的直線。所以我們需要 $T\mathbf{d}$ 平行於 $\mathbf{d}$，即 $\mathbf{d}$ 是特徵向量（eigenvector）。試取 $\mathbf{d} = (1, m)$：

$$T\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c + sm\\s + cm\end{pmatrix},$$

它平行於 $(1, m)$ 當且僅當 $s + cm = m(c + sm)$，即 $s(1 - m^2) = 0$。由於 $s \neq 0$，故 $m = \pm 1$。（鉛垂方向 $(0, 1)$ 被送到 (s, c)，後者並非鉛垂，所以不會得出新的直線。）這兩條直線是

$$\boxed{y = x \quad \text{及} \quad y = -x}$$

而事實上 $T(1, 1) = \mathrm{e}^{u}(1, 1)$ 及 $T(1, -1) = \mathrm{e}^{-u}(1, -1)$。它們正是雙曲線的漸近線（asymptotes），這與雙曲線映射到自身的結果吻合。

斜率：$v' = v + u$

取一條通過點 $\mathbf{p}$、方向為 $\mathbf{d}$ 的直線，其上的點為 $\mathbf{p} + t\mathbf{d}$。由線性可知它的像是 $T\mathbf{p} + tT\mathbf{d}$：一條通過 $T\mathbf{p}$、方向為 $T\mathbf{d}$ 的直線。所以直線的位置無關重要，只有方向才有影響。

斜率為 $\tanh v$ 的直線，方向為 $(1, \tanh v)$，或者乘以 $\cosh v > 0$ 後，方向為 $(\cosh v, \sinh v)$。於是由加法公式，

$$T\begin{pmatrix}\cosh v\\\sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v\\\sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(u + v)\\\sinh(u + v)\end{pmatrix}$$

因此像直線的斜率為 $\tanh(v + u)$。由於 tanh 是一對一（one-to-one）的，$\tanh v' = \tanh(v + u)$ 給出

$$v' = v + u,$$

這正是所要證明的。（只有斜率嚴格介乎 -1 與 1 之間的直線才可以這樣表示，這就是題目採用 $\tanh v$ 的原因。）

相等的夾角

若兩條直線的斜率為 m_1 和 m_2，且 $1+m_1m_2 \neq 0$，則它們之間的銳角 θ 滿足

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|.$$

這裏 $|m_1|, |m_2| < 1$，所以 $1+m_1m_2 > 0$：兩條直線永不互相垂直，$\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$，而且 θ 由 $\tan\theta$ 唯一決定。

> **想一想** 這條公式看來很像 $\tanh(v_1-v_2)$，但分母的正負號不對。那麼它實際上化簡成甚麼？

代入 $m_i = \tanh v_i$，並把分子和分母同乘以 $\cosh v_1 \cosh v_2 > 0$：

$$\tan\theta = \frac{|\sinh v_1\cosh v_2 - \cosh v_1 \sinh v_2|}{\cosh v_1\cosh v_2 + \sinh v_1 \sinh v_2} = \frac{|\sinh(v_1-v_2)|}{\cosh(v_1+v_2)}.$$

變換後的直線有 $v_i' = v_i + u$。它們的差不變，但它們的和增加了 $2u$，所以它們之間的夾角 θ' 滿足

$$\tan\theta' = \frac{|\sinh(v_1-v_2)|}{\cosh(v_1+v_2+2u)}.$$

要 ℓ_1 和 ℓ_2 相交，必須有 $v_1 \neq v_2$，所以分子不是零。因此

$$\theta = \theta' \iff \cosh(v_1+v_2) = \cosh(v_1+v_2+2u).$$

由於 $\cosh a = \cosh b$ 當且僅當 $a = \pm b$，這表示要麼 $v_1+v_2 = v_1+v_2+2u$，但因為 $u>0$，這不可能；要麼 $v_1+v_2 = -(v_1+v_2+2u)$。所以充分必要條件（necessary and sufficient condition）是

$$\boxed{v_1+v_2 = -u}$$

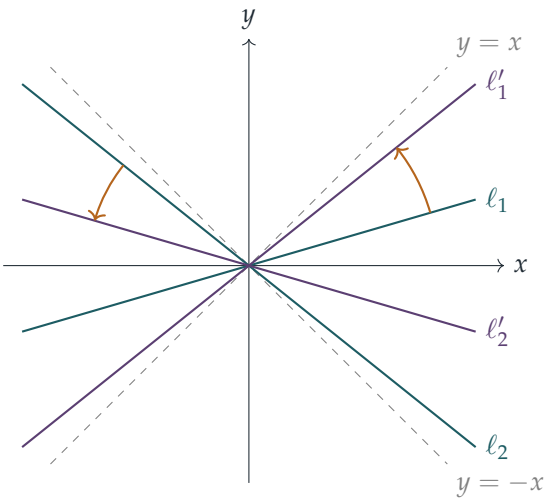
或等價地 $v_1' + v_2' = u$。

兩條直線相交於原點時的圖像

當 $v_1+v_2 = -u$ 時，我們有

$$v_1' = v_1+u = -v_2, \qquad v_2' = v_2+u = -v_1.$$

所以 ℓ_1' 的斜率為 $-\tanh v_2$：它是 ℓ_2 對 x 軸的反射（reflection）。同樣，ℓ_2' 是 ℓ_1 的反射。若兩條直線通過原點，變換後的一對直線就只是原來那一對對 x 軸的鏡像，這就是它們之間的夾角相同的原因。圖中採用 $u=0.8$、$v_1=0.3$、$v_2=-1.1$：ℓ_1, ℓ_2 的斜率約為 0.29 和 -0.80，而 ℓ_1', ℓ_2' 的斜率約為 0.80 和 -0.29。每條直線都轉向 $y=x$，即被 T 拉伸的那條不變直線。



藍綠色的直線是 ℓ_1, ℓ_2，紫紅色的直線是它們的像；琥珀色的箭頭顯示 $\ell_1 \to \ell_1'$ 和 $\ell_2 \to \ell_2'$。紫紅色的一對是藍綠色的一對對 x 軸的反射。

驗算

- 取 $u = 0.8$、$v_1 = 0.3$、$v_2 = -1.1$，ℓ_1 與 ℓ_2 之間的夾角以及它們的像之間的夾角，數值上都是 54.92°。把 v_2 稍作改動，兩個夾角便不再相等。
- 當 $u \to 0$ 時，T 變成恆等變換（identity），條件變成 $v_1 + v_2 = 0$：兩條直線對 x 軸對稱，而恆等映射顯然會保持這種對稱。
- $T(1,1) = \mathrm{e}^u(1,1)$ 很容易用手算驗證，因為 $\cosh u + \sinh u = \mathrm{e}^u$。

常見錯誤

- 只證明了雙曲線映射到自身之內；要用逆變換才能說明沒有遺漏任何一點。
- 把夾角公式寫成 $\tanh(v_1 - v_2)$；$1 + m_1 m_2$ 中的 $+$ 號使分母變成 $\cosh(v_1 + v_2)$，而在 T 之下改變的正是這個和。
- 忘記了 $\cosh a = \cosh b$ 的根 $v_1 + v_2 = v_1 + v_2 + 2u$，又沒有說明它為何不可能。

STEP 之外

這個矩陣是狹義相對論（special relativity）中的洛倫茲變換（Lorentz boost），其中 x 和 y 分別扮演時間和空間的角色（採用光速為 1 的單位）。$x^2 - y^2$ 這個量是不變間隔

（invariant interval），$\tanh v$ 是速度，而 v 是它的快度（rapidity）。$v' = v + u$ 這個結果說明快度可以相加，這其實就是相對論速度加法公式的另一種面貌。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）就是以這種方式建立狹義相對論的。至於以特徵向量的觀點看不變直線，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。