詳細解答

STEP III 1991，第 5 題

純數學 • 極坐標曲線與常微分方程

STEP III 1991，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/91-s3-q5

關鍵思路

先把極坐標（polar coordinates）放在一旁：這條方程其實只是一條以 θ 為變量的二階常係數線性常微分方程（linear second-order ODE with constant coefficients）。按慣常方法求解（餘函數加特別積分），用 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 處的條件定出常數，然後再回到幾何。由 $r = f(\theta)$ 給出的曲線，若 r 起點和終點皆為 0，而中間一直保持正值，便是一個閉合環圈（closed loop），其面積為 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$。

解答

解微分方程

輔助方程(auxiliary equation)$m^2+4=0$ 的根為 $m=\pm 2\mathrm{i}$，所以餘函數(complementary function）是

$$r = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta.$$

至於特別積分（particular integral），$\sin 3\theta$ 並不在餘函數之內，所以我們試用 $r = k\sin 3\theta$。於是 $r'' = -9k\sin 3\theta$，而

$$-9k\sin 3\theta + 4k\sin 3\theta = 5\sin 3\theta \quad\Longrightarrow\quad k = -1.$$

因此通解（general solution）為

$$r = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta - \sin 3\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2A\sin 2\theta + 2B\cos 2\theta - 3\cos 3\theta.$$

在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 處，有 $\cos 2\theta = -1$、$\sin 2\theta = 0$、$\sin 3\theta = -1$ 及 $\cos 3\theta = 0$。兩個條件變成

$$r = -A + 1 = 1 \quad\Longrightarrow\quad A = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2B = -2 \quad\Longrightarrow\quad B = 1.$$

故此

$$r = \sin 2\theta - \sin 3\theta.$$

曲線是一個閉合環圈

要看出 r 在何處為零、其正負號如何，可利用恆等式 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$ 作因式分解：

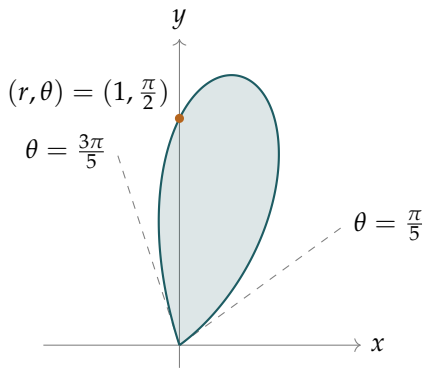
$$r = 2\cos\frac{5\theta}{2}\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) = -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{5\theta}{2}.$$

想一想 為甚麼因式分解後的形式能解決「閉合環圈」這個問題？

因為在給定的範圍內，兩個因子的正負號都一目了然。當 $\frac{\pi}{5} \le \theta \le \frac{3\pi}{5}$ 時：

- $\frac{\theta}{2}$ 位於 $\left[\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}\right]$ 之內，所以 $\sin\frac{\theta}{2} > 0$；
- $\frac{5\theta}{2}$ 位於 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 之內，所以 $\cos\frac{5\theta}{2} \le 0$，等號只在兩個端點成立。

所以在 $\theta = \frac{\pi}{5}$ 及 $\theta = \frac{3\pi}{5}$ 處 $r = 0$，而對嚴格介乎兩者之間的每一個 θ 都有 $r > 0$。因此曲線沿射線 $\theta = \frac{\pi}{5}$ 離開原點，以正的 r 繞行一周，再沿射線 $\theta = \frac{3\pi}{5}$ 返回原點。其間每一條射線 $\theta =$ 常數 都與曲線恰好相交一次（就是對應該 $r > 0$ 的那一點），所以曲線不會自相交。它是單一個閉合環圈，圍出區域 $0 \le r \le \sin 2\theta - \sin 3\theta$，$\frac{\pi}{5} \le \theta \le \frac{3\pi}{5}$。



面積

所圍的面積為

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\pi/5}^{3\pi/5} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/5}^{3\pi/5}\left(\sin^2 2\theta - 2\sin 2\theta\sin 3\theta + \sin^2 3\theta\right)\mathrm{d}\theta.$$

利用 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ 及 $2\sin P\sin Q = \cos(P-Q) - \cos(P+Q)$，

$$r^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\cos 4\theta - \tfrac{1}{2}\cos 6\theta - \cos\theta + \cos 5\theta.$$

記 $D = \sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5}$。我們在 $\left[\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\right]$ 上逐項積分，並利用 $\sin(x+2\pi) = \sin x$ 及 $\sin(\pi - x) = \sin x$ 把每個正弦值化為 $\pm\sin\frac{\pi}{5}$ 或 $\pm\sin\frac{2\pi}{5}$：

$$\begin{aligned}
\int 1\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{2\pi}{5},\\
\int -\tfrac{1}{2}\cos 4\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\tfrac{1}{8}\left[\sin\tfrac{12\pi}{5} - \sin\tfrac{4\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{8}\left[\sin\tfrac{2\pi}{5} - \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{8}D,\\
\int -\tfrac{1}{2}\cos 6\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\tfrac{1}{12}\left[\sin\tfrac{18\pi}{5} - \sin\tfrac{6\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{12}\left[-\sin\tfrac{2\pi}{5} + \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = \tfrac{1}{12}D,\\
\int -\cos\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\left[\sin\tfrac{3\pi}{5} - \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = -D,\\
\int \cos 5\theta\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{1}{5}\left[\sin 3\pi - \sin\pi\right] = 0.
\end{aligned}$$

（第三行中，$\sin\frac{18\pi}{5} = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\frac{2\pi}{5}$ 而 $\sin\frac{6\pi}{5} = -\sin\frac{\pi}{5}$。）相加得

$$\int_{\pi/5}^{3\pi/5} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{5} + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{12} - 1\right)D = \frac{2\pi}{5} - \frac{25}{24}D,$$

再除以二，

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{5} - \frac{25}{48}D = \frac{\pi}{5} + \frac{25}{48}\left[\sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}\right],$$

這正是所求的結果。

驗算

- 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 處：$r = \sin\pi - \sin\frac{3\pi}{2} = 1$ 而 $r' = 2\cos\pi - 3\cos\frac{3\pi}{2} = -2$，符合要求。
- 以數值計算，$\mathcal{A} \approx 0.6283 - \frac{25}{48}(0.3633) \approx 0.4391$。對 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 使用辛普森法則（Simpson's rule），以及對描出的環圈使用鞋帶公式（shoelace formula），兩者都得出 0.43911。由 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 出發以數值方法逐步求解微分方程，可重現 $r = \sin 2\theta - \sin 3\theta$，並確認 r 在兩端都回到 0。
- 答案合理：環圈最遠達到 $r \approx 1.22$，所張的角為 $\frac{2\pi}{5}$。半徑為 1.22、圓心角為該角的扇形，面積約為 0.93，而環圈佔去其中略少於一半。

常見錯誤

- 弄錯特別積分的正負號：$(-9+4)k = 5$ 給出 $k = -1$，而不是 $+1$。
- 忘記證明在兩個端點之間 $r > 0$。單憑 r 有兩個零點並不足以構成環圈：r 有可能在中間變號，那樣 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 就不是所圍的面積了。
- 化簡 $\sin\frac{12\pi}{5}$ 或 $\sin\frac{18\pi}{5}$ 時粗心大意：兩者各為 $\pm\sin\frac{2\pi}{5}$，而正負號至關重要。

STEP 之外

這裏的方法之所以行得通，是因為方程是線性的：每一個解都是一個特解加上兩個獨立解 $\cos 2\theta$ 和 $\sin 2\theta$ 的組合，而兩個初始條件（initial conditions）恰好選出唯一的一個解。這就是線性常微分方程的存在性與唯一性定理（existence and uniqueness theorem），大學一年級的課程會證明它，並且經常用到。一個相關而又引人入勝的事實是：對於在平方反比力（inverse-square force）作用下的軌道，$u = 1/r$ 滿足 $u'' + u =$ 常數，牛頓（Newton）定律正是這樣推出圓錐曲線（conic section）軌道的。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教材）對線性理論有詳盡的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。