詳細解答

STEP III 1991，第 4 題

純數學 • 三維空間中的直線與平面

STEP III 1991，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/91-s3-q4

關鍵思路

同一位觀察者 O_1 的兩條不同視線（line of sight）都經過 O_1，所以它們張成一個平面（plane），而 P 的路徑與這兩條視線都相交。一條直線若與經過 O_1 的兩條直線相交，而本身又不經過 O_1，就必定位於這兩條直線所在的平面上。對 O_2 也是同樣道理，所以路徑就是兩個平面的交線。這樣一來，一個關於四條看似異面（skew）的直線的問題，就化為一個叉積（cross product）和一組聯立方程（simultaneous equations）。

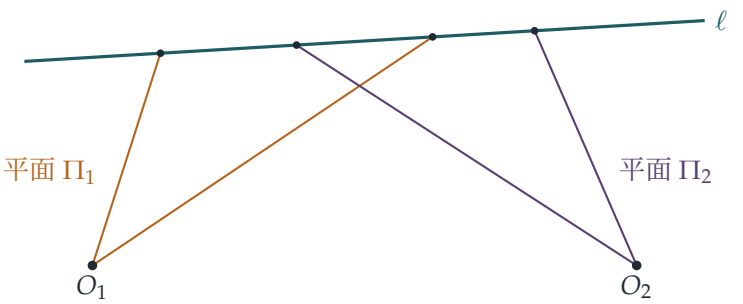
解答

設 P 沿直線 ℓ 運動。四條視線的方向為

$$\mathbf{d}_1 = (2,0,3), \qquad \mathbf{d}_1' = (0,3,4) \qquad （經過O_1）,$$

$$\mathbf{d}_2 = (-3,1,3), \qquad \mathbf{d}_2' = (-4,2,5) \qquad （經過O_2）.$$

每條視線都連接一位觀察者與 P 的某個位置，所以 ℓ 與這四條視線全部相交。



（僅為示意圖：兩條琥珀色視線與 ℓ 位於同一平面 Π_1 上，兩條紫紅色視線與 ℓ 則位於另一平面 Π_2 上。）

為何 ℓ 位於經過每位觀察者的一個平面上

首先，ℓ 不可能經過 O_1。假如它經過，那麼每當 $P \neq O_1$ 時，從 O_1 出發的視線就是 ℓ 本身，於是從 O_1 出發不可能有兩條不同的視線。同理，ℓ 也不經過 O_2。

從 O_1 出發的兩條視線是經過 O_1 的不同直線，所以它們只在 O_1 相交，並張成一個平面 Π_1。直線 ℓ 與它們交於兩點，而這兩點互不相同，因為兩條視線唯一的公共點是 O_1，而 ℓ 並不經過 O_1。這兩點都在 Π_1 上，所以整條 ℓ 都在 Π_1 上。同樣地，ℓ 位於平面 Π_2 上，這個平面經過 O_2，並包含 $\mathbf{d}_2$ 和 $\mathbf{d}_2'$。

> ? **想一想** 難道 ℓ 不可以只是與每條視線各交於一點，而不位於任何特定的平面上嗎？

若只有一條視線，的確可以。但這裏有兩個交點落在經過 O_1 的直線上，而兩個相異的點就確定了 ℓ。這兩點都在 Π_1 上，所以 ℓ 別無選擇：它就是經過這兩點的直線，而這條直線位於 Π_1 上。

平面 Π_1

Π_1 的一個法向量（normal）是

$$\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_1' = (2,0,3) \times (0,3,4) = (0-9,\ 0-8,\ 6-0) = (-9,-8,6),$$

而 Π_1 經過原點，所以

$$\Pi_1: \quad 9x + 8y - 6z = 0.$$

平面 Π_2

Π_2 的一個法向量是

$$\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_2' = (-3,1,3) \times (-4,2,5) = (5-6,\ -12+15,\ -6+4) = (-1,3,-2),$$

而 Π_2 經過 $O_2(8a,0,0)$，所以 $-(x-8a) + 3y - 2z = 0$，即

$$\Pi_2: \quad x - 3y + 2z = 8a.$$

（快速驗算：$(-3,1,3)\cdot(-1,3,-2) = 3+3-6 = 0$ 及 $(-4,2,5)\cdot(-1,3,-2) = 4+6-10 = 0$。）

我們假設 $a \neq 0$，否則兩位觀察者會重合。於是 O_2 不在 Π_1 上（因為 $9 \cdot 8a \neq 0$），而 O_1 也不在 Π_2 上，這與上文所說的一致。

路徑

法向量 $(-9,-8,6)$ 與 $(-1,3,-2)$ 並不平行，所以 Π_1 與 Π_2 相交於唯一一條直線，而這條直線必定是 ℓ。它的方向與兩個法向量都垂直：

$$(-9,-8,6)\times(-1,3,-2)=(16-18,\ -6-18,\ -27-8)=(-2,-24,-35),$$

所以我們可以取方向為 $(2,24,35)$。要找直線上的一點，可設 $y=0$。兩條方程變成 $9x=6z$ 和 $x+2z=8a$，所以 $x=\frac{2}{3}z$ 及 $\frac{8}{3}z=8a$。由此得 $z=3a$ 和 $x=2a$。所以 $(2a,0,3a)$ 在 ℓ 上。它也在從 O_1 出發的第一條視線上，正如所料。

因此 P 的路徑為

$$\boxed{\frac{x-2a}{2}=\frac{y}{24}=\frac{z-3a}{35}}$$

或等價地，由 $9x+8y-6z=0$ 和 $x-3y+2z=8a$ 這一對方程給出。

最後，ℓ 確實與全部四條視線相交，而且交點都不是觀察者所在的點。把 ℓ 寫成 $(2a+2\lambda,\ 24\lambda,\ 3a+35\lambda)$，它與四條視線的交點依次為

$$(2a,0,3a),\qquad (0,-24a,-32a),\qquad \left(\tfrac{80a}{37},\tfrac{72a}{37},\tfrac{216a}{37}\right),\qquad \left(\tfrac{56a}{25},\tfrac{72a}{25},\tfrac{36a}{5}\right)$$

。

想一想 當 $a>0$ 時，第二個點的 y 和 z 都是負數。這有問題嗎？

題目給出的視線是整條直線，而 $(0,-24a,-32a)$ 滿足 $x=0,\ y/3=z/4$。我們只用到這些直線，並沒有用到觀察者面向哪一方，所以答案成立。如果你把「視線」理解為從觀察者出發的射線，這次觀測就落在 O_1 的背後。那只是數據的一個古怪之處，並非方法有錯。

驗算

- 把點 $(2a,0,3a)$ 和方向 $(2,24,35)$ 代入兩個平面方程：$9(2)+8(24)-6(35)=18+192-210=0$ 及 $2-72+70=0$，所以這個方向位於兩個平面上。
- 取 $a=1$，點 $\left(\frac{80}{37},\frac{72}{37},\frac{216}{37}\right)$ 等於 $O_2+\frac{72}{37}(-3,1,3)$，而且 $\frac{80/37-2}{2}=\frac{3}{37}=\frac{72/37}{24}$。所以它既在視線上，也在路徑上。
- 我們對 a 的若干個值，以精確的有理數運算驗證了全部四個交點。

常見錯誤

- 試圖求出各對視線的交點：不同觀察者在不同時刻的視線，根本不一定相交。

- 忘記 Π_2 經過的是 O_2 而不是原點，結果得出 $x - 3y + 2z = 0$ 而不是 $= 8a$。
- 計算叉積時正負號出錯。務必把法向量與兩個方向向量分別再作點積驗算。

STEP 之外

空間中與四條給定直線都相交的直線有多少條？若四條直線處於一般位置（general position），答案是兩條（在複數範圍內計算；在實數範圍內則可以是零條）。這是枚舉幾何（enumerative geometry）的一個經典結果，而本題的四條直線比較特殊，因為它們兩兩一組地經過兩位觀察者。同一個「視線平面」的想法，也是三角測量（triangulation）和立體視覺中對極幾何（epipolar geometry）的基礎：兩部相機藉此還原三維空間中各點的位置。至於直線、平面與交集的線性代數，可閱讀 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。