詳細解答

STEP III 1991，第 3 題

純數學 • 分段函數與反函數

> **STEP III 1991，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q3

關鍵思路

絕對值（modulus）不過是一個函數，其內部的式子變號時，它的表達式就跟著改變。這裏三個絕對值只在 $x = -1$、0 和 1 處變號，因此在它們把 $x < 2$ 分割出來的四個區間上，函數各自都是一個普通的二次函數（quadratic）。一旦求得這四個二次函數，每一個問題（轉向點、拐點、連續性、光滑性、反函數）都只是關於簡單拋物線及其如何相接的問題。

解答

去掉絕對值

把絕對值內的式子因式分解：$x^2 - x = x(x-1)$、$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ 和 $x^2 + x = x(x+1)$。它們的正負號如下：

區間	$x^2 - x$	$x^2 - 1$	$x^2 + x$	$\mathrm{f}(x)$
$x \le -1$	$+$	$+$	$+$	$x^2 - 4x - 1$
$-1 \le x \le 0$	$+$	$-$	$-$	$3x^2 + 1$
$0 \le x \le 1$	$-$	$-$	$+$	$1 - 5x^2$
$1 \le x < 2$	$+$	$+$	$+$	$x^2 - 4x - 1$

例如，在 $-1 \le x \le 0$ 上，

$$\mathrm{f}(x) = 2(x^2 - x) + (1 - x^2) + 2(x^2 + x) = 3x^2 + 1,$$

而在 $0 \le x \le 1$ 上，$\mathrm{f}(x) = -2(x^2 - x) + (1 - x^2) - 2(x^2 + x) = 1 - 5x^2$。在外側的兩個區間上，三個絕對值內的式子全為正，而 $2(x^2 - x) + (x^2 - 1) - 2(x^2 + x) = x^2 - 4x -$

1。在端點處，其中一個絕對值內的式子為零，所以兩邊的公式在該處都正確。

連續性與可導性

f 由 $|\cdot|$ 和多項式組合而成，這些全都是連續的，所以 f 在 $x < 2$ 上**處處連續（continuous）**。作為驗算，相鄰的公式在接駁處吻合：$f(-1) = 4$、$f(0) = 1$、$f(1) = -4$。

至於可導性（differentiability），可比較接駁處的單側導數（one-sided derivative）。四段的導數分別為 $2x - 4$、$6x$、$-10x$ 和 $2x - 4$。

- 在 $x = -1$：左側為 $2(-1) - 4 = -6$，右側為 $6(-1) = -6$。兩者相同，所以 $f'(-1) = -6$。
- 在 $x = 0$：兩側都得 0，所以 $f'(0) = 0$。
- 在 $x = 1$：左側為 -10，右側為 $2 - 4 = -2$。兩者不同，所以圖像在 $(1, -4)$ 處有一個**尖角（corner）**。

因此 f **並非處處可導**：它恰好只在 $x = 1$ 處不可導。

轉向點與拐點

在每一段上都有 $f' < 0$，只有 $x = 0$ 這一點例外：

- $x < -1$ 和 $1 < x < 2$：由於 $x < 2$，$f'(x) = 2x - 4 < 0$；
- $-1 < x < 0$：$f'(x) = 6x < 0$；
- $0 < x < 1$：$f'(x) = -10x < 0$。

由於 f 連續，而且在每一段上都嚴格遞減，所以它**在整個 $x < 2$ 上嚴格遞減（strictly decreasing）**。特別地，它**沒有極大點或極小點**，連局部的也沒有。

> ? **想一想** $f'(0) = 0$，那麼 $(0, 1)$ 不就是轉向點（turning point）嗎？

不是。左邊一段 $3x^2 + 1$ 在 0 處取得極小值，右邊一段 $1 - 5x^2$ 則在該處取得極大值，但在各自公式適用的區間上，兩者都是遞減的。所以 f 經過 $x = 0$ 時仍然在下降，只是切線是水平的。

現在看凹凸性（concavity）。各段的二階導數為

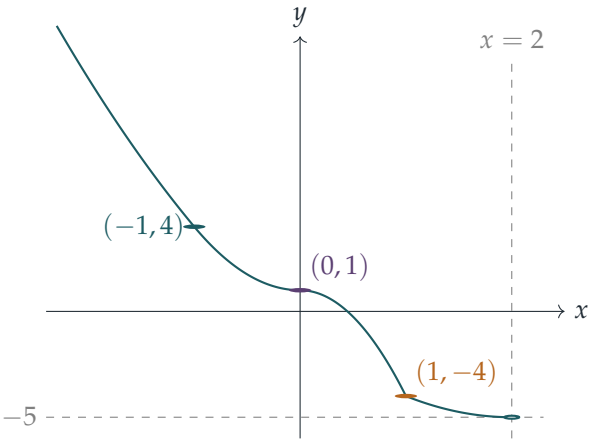
$$f'' = 2\ (x < -1), \qquad 6\ (-1 < x < 0), \qquad -10\ (0 < x < 1), \qquad 2\ (1 < x < 2).$$

- 在 $x = 0$ 處，圖像由下凸（convex）變為上凸（concave），而且在該處有切線，所以 $(0, 1)$ 是一個**駐拐點（stationary point of inflection）**。
- 在 $x = -1$ 處，f'' 由 2 跳到 6，但仍然為正，所以沒有拐點。

- 在 $x = 1$ 處，曲線由上凸變回下凸，但該處是尖角，沒有切線。按照通常的定義（切線穿過曲線），$(1, -4)$ 不是拐點。作答時值得明確指出這一點。

草圖

當 $x \to -\infty$ 時，$f(x) \to +\infty$。當 $x \to 2^-$ 時，$f(x) \to 4 - 8 - 1 = -5$，這個值並不會取到。



曲線一直下降。它在 $(0, 1)$ 處變平，形成一個水平拐點，並在 $(1, -4)$ 處有一個尖角，斜率在該處由 -10 跳到 -2。

反函數

由於 f 在 $x < 2$ 上連續且嚴格遞減，而且在左端 $f \to \infty$，在右端 $f \to -5$，所以它是由 $(-\infty, 2)$ 到 $(-5, \infty)$ 的雙射 (bijection)。因此 f^{-1} 定義在 $x > -5$ 上。我們利用 $y = f(x)$，在每一段所覆蓋的值域上分別求反函數（inverse）。

- $x \le -1$，值域 $y \ge 4$：$y = x^2 - 4x - 1 = (x-2)^2 - 5$，所以 $(x-2)^2 = y + 5$。這裏 $x - 2 < 0$，所以取負根：$x = 2 - \sqrt{y+5}$。
- $-1 \le x \le 0$，值域 $1 \le y \le 4$：$x^2 = (y-1)/3$，而 $x \le 0$，所以 $x = -\sqrt{(y-1)/3}$。
- $0 \le x \le 1$，值域 $-4 \le y \le 1$：$x^2 = (1-y)/5$，而 $x \ge 0$，所以 $x = \sqrt{(1-y)/5}$。
- $1 \le x < 2$，值域 $-5 < y \le -4$：同樣有 $(x-2)^2 = y + 5$ 且 $x - 2 < 0$，所以 $x = 2 - \sqrt{y+5}$。

把變量改寫為 x：

$$\mathrm{f}^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x+5}, & -5 < x \le -4, \\ \sqrt{\frac{1-x}{5}}, & -4 \le x \le 1, \\ -\sqrt{\frac{x-1}{3}}, & 1 \le x \le 4, \\ 2 - \sqrt{x+5}, & x \ge 4. \end{cases}$$

各公式在共用的端點處吻合。例如，在 $x = 4$ 處兩者都得 -1，在 $x = -4$ 處兩者都得 1。

驗算

- 抽查數值：$\mathrm{f}(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$，而 $1 - 5 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$。此外 $\mathrm{f}^{-1}(-\frac{1}{4}) = \sqrt{1.25/5} = \frac{1}{2}$。
- 直接計算，$\mathrm{f}(-3) = 2 \cdot 12 + 8 - 2 \cdot 6 = 20$。公式給出 $9 + 12 - 1 = 20$，而 $\mathrm{f}^{-1}(20) = 2 - \sqrt{25} = -3$。
- 數值上，對 10^5 個隨機選取的 $x < 2$ 都有 $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(x)) = x$；函數在一個細密網格的每一點上都在遞減；而 $x = 1$ 處的單側斜率算出來是 -10 和 -2。

常見錯誤

- 因為 $\mathrm{f}'(0) = 0$ 就把 $(0, 1)$ 稱為極大點或極小點。如果某條拋物線本身的轉向點位於該公式適用區間的邊緣，那個轉向點就無關重要。
- 求反函數時選錯平方根。應由 x（或 $x - 2$）在每個區間上的正負號來決定。
- 以為兩個公式的接駁處必定是不可導點。在 $x = -1$ 和 $x = 0$ 處，兩邊的斜率是吻合的。

STEP 之外

分段定義的函數（piecewise-defined function）可以連續而不可導，也可以可導而二階導數不連續（這裏 f'' 在 $x = -1$ 和 $x = 0$ 處跳躍）。反函數定理（inverse function theorem）指出，嚴格單調（strictly monotonic）的連續函數有連續的反函數，而且在 $\mathrm{f}' \neq 0$ 的地方反函數可導。留意 f^{-1} 在 $x = 1$ 處有一條垂直切線，恰好對應 $\mathrm{f}'(0) = 0$ 之處。Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析入門讀本）對這些概念有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。