詳細解答

STEP III 1991，第 2 題

純數學 • 幾何中的複數

> **STEP III 1991，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q2

關鍵思路

一個複數（complex number）可以同時記錄長度之比和一個角。商 $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$ 記下了三角形在 P_1 處兩條邊的長度之比（即它的模（modulus)），以及由一條邊轉到另一條邊所轉過的角（即它的輻角（argument)）；而這兩項資料，正是相似三角形（similar triangles）的 SAS 判別法所需要的。只要把條件寫成行列式（determinant），各部分便歸結為把一個行列式因式分解（factorise），或者巧妙地選取一個三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 來作比較。

解答

先處理一個印刷錯誤

按題目所印，左邊的分母是 $z_2 - z_3$。這不可能是對的：取 $w_i = z_i$，使兩個三角形完全相同。這時右邊是 $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$，由於 $z_2 \neq z_1$，它與左邊並不相等。題目原意的條件，亦即與行列式吻合的條件，是

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}. \qquad (*)$$

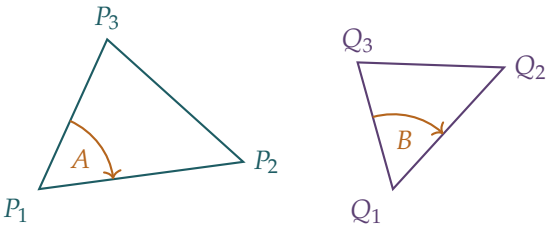
我們要證明的就是這個條件。

相似的條件

設 A 為三角形 $P_1P_2P_3$ 在 P_1 處的角，故 $0 < A < \pi$。以極式（polar form）表示，

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{P_1P_2}{P_1P_3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

其中 θ 是由 $\overrightarrow{P_1P_3}$ 的方向轉到 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向所轉過的角。因此，若 $P_1 \to P_2 \to P_3$ 沿逆時針方向排列，則 $\theta = -A$（由 P_1P_3 出發，要順時針轉才到達 P_1P_2）；若沿順時針方向排列，則 $\theta = +A$。簡而言之，這個商的輻角（取值於 $(-\pi, \pi)$）的大小等於 P_1 處的角，而其正負號則告訴我們三角形的繞向（sense）。對各個 w 而言情況相同，其中 B 是 Q_1 處的角。



同向相似 $\Rightarrow (*)$。若兩個三角形相似，且 $P_i \leftrightarrow Q_i$ 互相對應，則 P_1 和 Q_1 處的兩邊之比相同，即 $P_1P_2/P_1P_3 = Q_1Q_2/Q_1Q_3$，而該處的角亦相等，即 $A = B$。由於兩個三角形的繞向相同，兩個輻角 $\mp A$ 和 $\mp B$ 的正負號相同，所以它們相等。模相等，輻角也相等，便得出 $(*)$。

$(*) \Rightarrow$ 同向相似。若 $(*)$ 成立，比較兩邊的模可得 $P_1P_2/P_1P_3 = Q_1Q_2/Q_1Q_3$。比較兩邊的輻角可得 $A = B$，而且正負號相同，所以兩個三角形的繞向相同。兩邊成比例而夾角相等，正是 SAS 條件，故兩個三角形相似，且 $P_i \leftrightarrow Q_i$ 互相對應。（若 $(*)$ 是實數，則兩組三點各自共線（collinear），這兩個退化的「三角形」仍然相似。）

還可以從另一個角度看同一件事：$(*)$ 恰好表示 $w_i = az_i + b$，其中常數 $a = (w_1 - w_2)/(z_1 - z_2) \neq 0$，$b = w_1 - az_1$。映射 $z \mapsto az + b$ 是倍數為 $|a|$ 的放大（enlargement），再加上轉角為 $\arg a$ 的旋轉（rotation）和一個平移（translation），而這樣的映射保持形狀和繞向不變。

行列式形式

去分母後（由於各點互不相同，兩個分母均不為零），$(*)$ 等價於

$$(z_1 - z_2)(w_1 - w_3) - (z_1 - z_3)(w_1 - w_2) = 0.$$

展開後，z_1w_1 項互相抵消，餘下

$$z_1(w_2 - w_3) - z_2(w_1 - w_3) + z_3(w_1 - w_2) = 0,$$

這正是該行列式沿第一行的展開式。所以 $(*)$ 等同於 $\det = 0$。

處理以下各部分時，用另一個方法計算這個行列式會較為方便。從第二列和第三列分別

減去第一列，行列式的值不變；然後沿最底一行展開，這一行現在是 $(1,0,0)$：

$$\det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} z_2-z_1 & z_3-z_1 \\ w_2-w_1 & w_3-w_1 \end{pmatrix}. \tag{†}$$

第 (i) 部分

取 $w_i = z_i^2$，(†) 變成

$$\begin{aligned}(z_2-z_1)(z_3^2-z_1^2)-(z_3-z_1)(z_2^2-z_1^2) &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)[(z_3+z_1)-(z_2+z_1)] \\ &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)(z_3-z_2).\end{aligned}$$

由於各 z_i 互不相同，每個因子均不為零。所以行列式永不為零，兩個三角形永不相似（按上述意義）。

第 (ii) 部分

取 $w_i = z_i^3$，並利用 $z_j^3 - z_1^3 = (z_j - z_1)(z_j^2 + z_j z_1 + z_1^2)$：

$$\begin{aligned}(z_2-z_1)(z_3^3-z_1^3)-(z_3-z_1)(z_2^3-z_1^3) &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)[(z_3^2+z_3z_1)-(z_2^2+z_2z_1)] \\ &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_1+z_2+z_3),\end{aligned}$$

這是因為 $z_3^2 - z_2^2 + z_1(z_3 - z_2) = (z_3 - z_2)(z_3 + z_2 + z_1)$。首三個因子均不為零，所以行列式為零當且僅當 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$。換言之，兩個三角形相似，當且僅當形心(centroid) $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ 位於原點。

第 (iii) 部分

竅門是把三角形與重新標記頂點後的自己作比較。取 Q_1, Q_2, Q_3 為 P_2, P_3, P_1，即

$$w_1 = z_2, \qquad w_2 = z_3, \qquad w_3 = z_1.$$

? 想一想 「等邊」為甚麼會與這樣的重新標記有關？

若在 $P_1 \leftrightarrow P_2$、$P_2 \leftrightarrow P_3$、$P_3 \leftrightarrow P_1$ 的對應下相似，則各組對應邊必有相同的比 $k > 0$：

$$\frac{P_2P_3}{P_1P_2} = \frac{P_3P_1}{P_2P_3} = \frac{P_1P_2}{P_3P_1} = k.$$

把三者相乘得 $k^3 = 1$，所以 $k = 1$，三邊全部相等。反之，若三角形是等邊 (equilateral) 三角形，則繞其中心旋轉 120°（取適當的方向）會把 $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$ 依次對應過去。旋轉保持形狀和繞向不變，所以該三角形與重新標記後的自己同向相似。因此

$$P_1P_2P_3 \text{ 為等邊三角形} \iff \text{它同向相似於} P_2P_3P_1.$$

根據第一部分，右邊成立當且僅當

$$0 = \det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = z_1(z_3 - z_1) - z_2(z_2 - z_1) + z_3(z_2 - z_3),$$

即

$$z_1z_3 - z_1^2 - z_2^2 + z_1z_2 + z_2z_3 - z_3^2 = 0 \iff z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2,$$

這正是所要證明的結果。

驗算

- 第 (ii) 部分：$z_1, z_2, z_3 = 1, \omega, \omega^2$（其中 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$）的形心為 0，但它們的立方全都等於 1，並非互不相同。改用 $z = 1,\ \mathrm{i},\ -1 - \mathrm{i}$。形心為 0，而立方分別是 $1,\ -\mathrm{i},\ 2 - 2\mathrm{i}$。按 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 的次序，兩個三角形的邊長都是 $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}$（在這個例子中它們甚至全等（congruent）），而且兩者都沿逆時針方向排列。
- 第 (iii) 部分：對於 $z = 0, 1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$，兩邊都等於 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$，因為 $1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$。
- 以電腦對 10^4 個隨機三角形作測試，結果證實 $w_i = az_i + b$ 總是滿足 $(*)$，而經反射的三角形 $w_i = a\bar{z}_i + b$ 則從不滿足。測試亦證實了 (†) 的兩個因式分解，以及等邊三角形的判別準則。至於題目所印的條件（分母為 $z_2 - z_3$），在所有真正相似的情況中無一成立。

常見錯誤

- 忽略三角形的繞向。單看模，只能得出「容許反射的相似」。互為鏡像的三角形，其輻角的正負號相反，所以並不滿足 $(*)$。
- 在第 (iii) 部分忘記證明逆命題（converse）：「與重新標記後的自己相似」這個論證必須雙向都成立，而 $k^3 = 1 \Rightarrow k = 1$ 這一步用到了 k 是正實數。

STEP 之外

映射 $z \mapsto az + b$ 就是平面上保持定向（orientation-preserving）的相似變換。它們是最簡單的莫比烏斯變換（Möbius transformations），而四個點的交比（cross-ratio）則是 $(*)$ 的推廣。等邊條件亦可因式分解為 $(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0$，這表示 z_1, z_2, z_3 沿其中一個繞向圍成一個等邊三角形。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把這種以幾何眼光看待複數的思考方式發揮得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。