詳細解答

STEP III 1991，第 15 題

概率與統計 • 樣本中配對的計數

> **STEP III 1991，第 15 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q15

關鍵思路

每一組 k 張牌出現的機會均等，所以每個概率（probability）都等於符合條件的手牌數目除以 $\binom{2n}{k}$。要數出具有指定對子結構的手牌，可以分階段構造。首先選定哪些種類以完整的一對出現，然後選定另外哪些種類只出現一張，最後決定每個單張種類的兩張牌中，我們手上拿的是哪一張。這個計數一旦完成，題目的每一部分都只是同一條公式的特殊情況。

解答

把 $2n$ 張牌看成全部可以互相區分（同一種類的兩張牌不妨編號為 1 和 2）。這樣，不放回地抽出 k 張牌時，$\binom{2n}{k}$ 個大小為 k 的子集各有相同的概率。當某一種類的兩張牌都被抽中時，我們說手牌中有該種類的一個對子（pair）。

四張牌，沒有對子

沒有對子的手牌包含四個不同的種類，每個種類各一張。選種類有 $\binom{n}{4}$ 種方法，每個種類選哪一張牌有 2 種方法，所以共有 $2^4\binom{n}{4}$ 手牌。由於

$$\binom{2n}{4} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{24} = \frac{4n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{24},$$

我們得到

$$\mathrm{P}(\text{沒有對子}) = \frac{16\cdot n(n-1)(n-2)(n-3)/24}{4n(n-1)(2n-1)(2n-3)/24} = \frac{4(n-2)(n-3)}{(2n-1)(2n-3)},$$

正如所求。（這裏 $n \geq 4$ 保證了四個不同的種類確實存在。）

四張牌，恰好一個對子

先選出以對子出現的種類（n 種方法）。其餘兩張牌必須來自餘下 $n-1$ 個種類中的兩個不同種類，選法有 $\binom{n-1}{2}$ 種，而每個種類選哪一張牌又有 2 種選擇。手牌的數目是

$$n \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 4 = 2n(n-1)(n-2),$$

所以

$$\mathrm{P}(\text{恰好一個對子}) = \frac{24 \cdot 2n(n-1)(n-2)}{4n(n-1)(2n-1)(2n-3)} = \frac{12(n-2)}{(2n-1)(2n-3)}.$$

k 張牌，恰好 r 個對子

假設手牌恰好有 r 個對子。它們佔去 $2r$ 張牌。餘下的 $k-2r$ 張牌全部屬於不同的種類，而且這些種類都不是那 r 個成對的種類，否則對子就會更多。於是我們數：

- 成對的種類：$\binom{n}{r}$ 種方法；
- 只出現一張的 $k-2r$ 個種類，從其餘 $n-r$ 個種類中選出：$\binom{n-r}{k-2r}$ 種方法；
- 每個單張種類的兩張牌中，我們拿的是哪一張：2^{k-2r} 種方法。

每一手恰好有 r 個對子的牌，都恰好由一組這樣的選擇得出。因此

$$\boxed{\mathrm{P}(\text{恰好}r\text{ 個對子}) = \frac{2^{k-2r}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-2r}}{\binom{2n}{k}}}$$

想一想 這個概率會不會等於零？它與四張牌的答案是否吻合？

單張的種類需要滿足 $k-2r \le n-r$，即 $r \ge k-n$。若 $k > n$，任意 k 張牌必定包含至少 $k-n$ 個對子，而 $\binom{n-r}{k-2r} = 0$ 自動處理了這個情況。取 $k=4$，$r=0$ 的情況給出 $2^4\binom{n}{4}/\binom{2n}{4}$，$r=1$ 則給出 $2^2\,n\binom{n-1}{2}/\binom{2n}{4}$，正好就是上面的兩個計數。

k 為偶數，所有牌都成對

設 $k=2m$。手牌由 m 個對子組成，當且僅當它是 m 個完整種類的併集（union）。這樣的手牌有 $\binom{n}{m}$ 手（這就是一般公式取 $r=m$ 的情況）。所以

$$\mathrm{P} = \frac{\binom{n}{m}}{\binom{2n}{2m}} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \cdot \frac{(2m)!\,(2n-2m)!}{(2n)!}.$$

要化簡這個式子，可把階乘（factorial）中的偶數因子和奇數因子分開歸組：

$$(2j)! = \big(2 \cdot 4 \cdots 2j\big)\big(1 \cdot 3 \cdots (2j-1)\big) = 2^j\, j!\,\big(1 \cdot 3 \cdots (2j-1)\big).$$

記 $O_j = 1\cdot 3\cdots(2j-1)$，並設 $O_0 = 1$。那麼 $(2j)!/j! = 2^j O_j$，所以

$$\mathrm{P} = \frac{2^m O_m \cdot 2^{n-m} O_{n-m}}{2^n O_n} = \frac{O_m\, O_{n-m}}{O_n}.$$

把 O_n 除以 O_{n-m}，剩下的是由 $2n-2m+1 = 2n-k+1$ 到 $2n-1$ 的奇數，所以

$$\mathrm{P}(\tfrac{1}{2}k \text{ 個對子}) = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(k-1)}{(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-k+1)},$$

正如所求。

另外還有一個簡潔的直接論證。把整副牌洗勻，以最上面的 k 張牌作為手牌。看看最頂的那張牌。它的拍檔出現在其餘 $2n-1$ 個位置中任何一個的機會均等，而其中 $k-1$ 個位置在手牌之內，所以拍檔在手牌中的概率是 $\frac{k-1}{2n-1}$。如果它確實在手牌中，就把這一對拿走。剩下的是 $2n-2$ 張牌的一個隨機排列，而手牌就是其中最上面的 $k-2$ 張。重複這個論證得到 $\frac{k-3}{2n-3}$，如此類推，直到 $\frac{1}{2n-k+1}$。把這些條件概率(conditional probability)相乘，便得到同一個乘積。

驗算

- 四張牌時共有三種情況：0、1 和 2 個對子，而 2 個對子的概率是 $\binom{n}{2}/\binom{2n}{4} = \frac{3}{(2n-1)(2n-3)}$。果然

  $$4(n-2)(n-3) + 12(n-2) + 3 = 4n^2 - 8n + 3 = (2n-1)(2n-3),$$

  所以三個概率之和為 1。
- 取 $n = 5$ 和四張牌，三個概率分別是 $\frac{8}{21}$、$\frac{4}{7}$ 和 $\frac{1}{21}$。用電腦對 $4 \le n \le 8$ 以及由 3 到 $2n-1$ 的每個 k 窮舉所有手牌，結果與一般公式及全部成對的公式均相符。
- 取 $k = 2$，全部成對的公式給出 $\frac{1}{2n-1}$，即第二張牌與第一張牌配成一對的機會。

常見錯誤

- 用 $\binom{2n-2r}{k-2r}$ 從餘下全部 $2n-2r$ 張牌中選出單張的牌。這樣會容許其中兩張屬於同一種類，從而產生額外的對子。
- 遺漏因子 2^{k-2r}。每個只出現一張的種類，拿到的可以是它兩張牌中的任何一張。

STEP 之外

恰好有 r 個對子的手牌數目，是典型的「先選結構，再填內容」式計數，而乘積 $1\cdot 3\cdots(2m-1)$（即雙階乘（double factorial）$(2m-1)!!$）數的是把 $2m$ 件物件分成若

干對的方法數目。雙階乘還會以標準正態分佈（standard normal distribution）的偶數階矩（moment）的身分再次出現。同樣的配對問題，即隨機樣本中有多少個對子得以保存，也見於經典的「失襪」問題和生日類型的問題。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）為這類計數打下良好的基礎。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。