詳細解答

# STEP III 1991，第 14 題

力學 • 涉及彈簧的圓周運動

**STEP III 1991，第 14 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

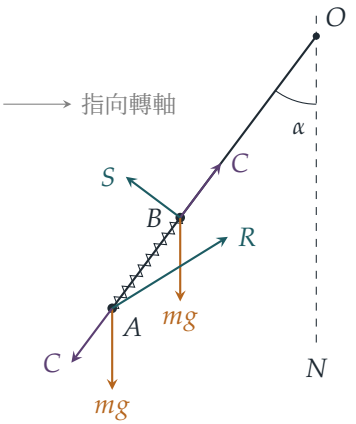
step.maths.org/questions/91-s3-q14

## 關鍵思路

所有物體都以相同的角速率（angular speed）繞 $ON$ 作水平圓周運動，所以每個質點都有已知的加速度 $\omega^2 r$，方向指向轉軸，此外再無其他加速度。小環套在一根光滑（smooth）的桿上，對它來說最簡潔的方程是沿桿方向的那一條，因為未知的法向反作用力（normal reaction）不會在其中出現。接着，彈簧的力把小環與 $A$ 處的質點聯繫起來，而桿在該處的反作用力的方向就決定了 $k$。

## 解答

**模型**。桿是輕而光滑的，$A$ 和 $B$ 是質量為 $m$ 的質點，彈簧沿着桿位於 $B$ 與 $A$ 之間。設 $\alpha = \sin^{-1}\frac{3}{5}$，於是 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$，$\cos\alpha = \frac{4}{5}$，並且 $\omega^2 = \frac{5g}{2a}$。設 $OB = x$，則 $AB = 2a - x$。



這裏 $C$ 是彈簧中的推力（thrust）（我們稍後會發現彈簧是被壓縮的，所以它把 $B$ 推向 $O$，並把 $A$ 推離 $O$），$S$ 是光滑桿對 $B$ 的法向反作用力（垂直於桿，位於鉛垂面內，指向有待確定），而 $R$ 是桿對 $A$ 的反作用力。由於 $\omega$ 是常數，而且 $B$ 相對於桿靜止，所以沒有橫越鉛垂面的加速度，因此所有的力都在該平面內。

**長度 $OB$**

$B$ 沿半徑為 $x\sin\alpha$ 的水平圓周運動，所以它的加速度是 $\omega^2 x\sin\alpha$，方向水平指向 $ON$。沿桿按 $O\to A$ 的方向（向下並遠離轉軸）分解（resolve）。加速度在這個方向上的分量是 $-\omega^2 x\sin\alpha\cdot\sin\alpha$，因為加速度指向轉軸，而桿與鉛垂線的夾角是 $\alpha$。

最簡單的做法，是把彈簧作用於 $B$ 的力設為張力（tension）$T$（把 $B$ 拉向 $A$），讓正負號自行在計算中顯現。由胡克定律（Hooke's law），

$$T=\frac{kmg\left((2a-x)-a\right)}{a}=\frac{kmg(a-x)}{a}.$$

因為桿是光滑的，反作用力 $S$ 沒有沿桿方向的分量。所以，沿 $OA$ 方向，

$$mg\cos\alpha+\frac{kmg(a-x)}{a}=-m\omega^2 x\sin^2\alpha.$$

代入 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$、$\sin^2\alpha=\frac{9}{25}$ 和 $\omega^2=\frac{5g}{2a}$，右邊就是 $-\frac{9gx}{10a}m$。兩邊除以 $mg$ 再乘以 $10a$：

$$\begin{aligned}8a+10k(a-x)&=-9x\\(10k+8)a&=(10k-9)x,\end{aligned}$$

所以

$$OB=x=\frac{(10k+8)a}{10k-9},$$

這正是要證明的結果。留意 $x>a$（答案要為正數，必須有 $10k>9$），所以 $AB=2a-x<a$：彈簧是被壓縮的，推力為

$$C=-T=\frac{kmg(x-a)}{a}=\frac{17k\,mg}{10k-9},$$

其中用到 $x-a=\dfrac{17a}{10k-9}$。

**求 $k$**

**想一想** 為甚麼 $A$ 處的反作用力不像 $B$ 處的那樣垂直於桿？

$A$ 處的質點是固定在桿上的，而不是套在桿上，所以桿可以沿任何方向推它或拉它。光滑這個條件只限制了作用於滑動小環的力。因此我們把 $R$ 寫成分量：$R_h$ 水平指向轉軸，$R_v$ 鉛垂向上。

$A$ 沿半徑為 $2a\sin\alpha = \frac{6a}{5}$ 的圓周運動，所以它的加速度是 $\omega^2 \cdot \frac{6a}{5} = 3g$，方向指向轉軸。推力 $C$ 沿 $OA$ 作用於 $A$，方向遠離 $O$，所以它的分量是遠離轉軸的 $C\sin\alpha$ 和向下的 $C\cos\alpha$。因此

$$\text{水平（指向轉軸）：}\quad R_h - \tfrac{3}{5}C = 3mg,$$
$$\text{鉛垂：}\quad R_v - mg - \tfrac{4}{5}C = 0.$$

設 $C = c\,mg$。反作用力與水平線的夾角是 $\tan^{-1}\frac{13}{21}$，所以

$$\frac{R_v}{R_h} = \frac{1+\frac{4}{5}c}{3+\frac{3}{5}c} = \frac{13}{21} \implies 21 + \tfrac{84}{5}c = 39 + \tfrac{39}{5}c \implies 9c = 18, \quad c = 2.$$

（當 $c > 0$ 時，$R_h$ 和 $R_v$ 都是正數，所以反作用力確實指向上方和內側，正負號並無歧義。）於是

$$\frac{17k}{10k-9} = 2 \implies 17k = 20k - 18 \implies k = 6.$$

所以 $k = 6$，由此得 $OB = \frac{68a}{51} = \frac{4}{3}a$，穩妥地介乎 $a$ 與 $2a$ 之間，而推力為 $C = 2mg$。（這時作用於 $A$ 的反作用力是 $R_h = \frac{21}{5}mg$，$R_v = \frac{13}{5}mg$。）

### 作用於小環的反作用力

**想一想** 應該沿哪個方向分解，才能以最少的工夫求出 $S$？

垂直於桿的方向：這樣彈簧的力就不會出現。在鉛垂面內取垂直於 $OA$ 的單位方向，指向上方並遠離轉軸；它與水平線的夾角是 $\alpha$，所以它的分量是向外的 $\cos\alpha$ 和向上的 $\sin\alpha$。設 $S$ 為作用於 $B$ 的反作用力在這個方向上的分量。重量的貢獻是 $-mg\sin\alpha$，而加速度（$\omega^2 x\sin\alpha$，指向轉軸）的貢獻是 $-\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha$。所以

$$S - mg\sin\alpha = -m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha.$$

代入 $x = \frac{4}{3}a$：

$$m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha = m\cdot\frac{5g}{2a}\cdot\frac{4a}{3}\cdot\frac{12}{25} = \frac{8}{5}mg, \qquad \text{所以} \qquad S = \frac{3}{5}mg - \frac{8}{5}mg = -mg.$$

因此桿與小環之間的反作用力的大小是

$$\boxed{mg},$$

而負號告訴我們，它垂直於桿，方向是向下並指向轉軸。

## 驗算

- 對 $B$ 作完整的向量驗算（水平分量以指向轉軸為正，鉛垂分量以向上為正），取 $C = 2mg$ 沿 $AO$ 作用，以及上面求得的 $S = mg$。水平方向：$\frac{3}{5}(2mg) + \frac{4}{5}(mg) = 2mg$，

而 $m\omega^2 x\sin\alpha = m\cdot\frac{5g}{2a}\cdot\frac{4a}{3}\cdot\frac{3}{5} = 2mg$。鉛垂方向：$\frac{4}{5}(2mg) - \frac{3}{5}mg - mg = 0$。兩者都平衡。

- 當 $k\to\infty$ 時，彈簧變成剛性，而 $OB\to a$，即彈簧的自然長度（natural length），與預期相符。
- 數值方面，取 $m = g = a = 1$，我們以 200 個隨機的 $k$ 值精確地驗證了 $OB$ 的公式，發現夾角只在 $k = 6$ 時才等於 $\tan^{-1}\frac{13}{21}$，並得到 $|S| = 1.0$。由一個小位移開始，逐步計算 $B$ 沿桿的運動，結果它一直留在 $x\approx 1.3333$ 附近。

## 常見錯誤

- 假設彈簧被拉長，然後對 $x > a$ 感到困惑。應讓張力的正負號由代數運算自行得出。
- 把 $A$ 處的反作用力當作垂直於桿。只有滑動的小環才受這個限制。
- 圓周運動的半徑用了 $x$ 而不是 $x\sin\alpha$。

## STEP 之外

在隨桿一起轉動的參考系中，$B$ 受到一個向外的「離心力」（centrifugal force）$m\omega^2 r$，沿桿方向的方程就變成一道普通的平衡問題。把這個觀點再推進一步，就會得到有效勢（effective potential）、科里奧利力（Coriolis force）（在這裏，一旦 $B$ 沿桿移動，它就由桿的反作用力抵銷），以及平衡的穩定性：$x = \frac{4}{3}a$ 是否穩定？Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）正是以這個程度討論非慣性參考系（non-inertial frames）和轉動系統。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。