詳細解答

STEP III 1991，第 13 題

力學 • 拋體與天花板的碰撞

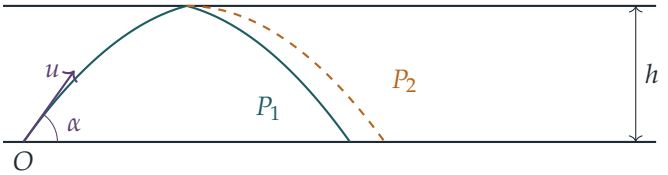
> **STEP III 1991，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q13

關鍵思路

天花板是光滑的，所以水平速度 $u\cos\alpha$ 始終不變，每個射程都只是 $u\cos\alpha$ 乘以飛行時間。全部工夫都在鉛垂方向的運動上，而能量方程（energy equation）可以立即給出質點到達天花板時的鉛垂速率。經過彈性碰撞（elastic impact）之後，質點下落的過程與上升的過程完全一樣，只是倒過來播放；經過非彈性碰撞（inelastic impact）之後，它就只是從靜止落下。

解答

把兩個質點都視為在重力作用下自由運動的質點（point mass），不計空氣阻力。記 $u=\sqrt{8gh}$、$s=\sin\alpha$ 及 $c=\cos\alpha$。以 O 為原點，取 x 沿水平方向，y 鉛垂向上。



到達天花板

初始鉛垂速度為 us，而在上升期間

$$\dot{y}^2=u^2s^2-2gy=8gh\,s^2-2gy.$$

質點要到達高度 h，必須在該處有 $\dot{y}^2\geq 0$，即 $8ghs^2\geq 2gh$，所以 $s^2\geq\frac{1}{4}$。由於 α 是銳角，$s>0$，故此條件即 $\sin\alpha\geq\frac{1}{2}$，亦即 $\alpha\geq\frac{1}{6}\pi$。（當 $\alpha=\frac{1}{6}\pi$ 時，質點恰好擦過天花

板。）當它確實到達天花板時，它在該處的向上速率為

$$w = \sqrt{8ghs^2 - 2gh} = \sqrt{2gh}\,\sqrt{4s^2 - 1}.$$

P_1 的射程

在上升途中，鉛垂速度以 g 的變率由 us 均勻地減至 w，所以到達天花板所需的時間為

$$t_1 = \frac{us - w}{g}.$$

想一想 P_1 從天花板回落到地面需要多少時間？

碰撞是完全彈性的，而天花板是光滑的，所以鉛垂速度變為向下的 w，水平速度則不變。於是，由天花板向下的鉛垂運動，就是上升時的鉛垂運動在時間上倒過來進行（從高度 h 出發，以速率 w 朝向地面，並以 g 加速）。因此它到達地面時的鉛垂速率為 us，所需時間同樣是 t_1。直接計算亦可：鉛垂速率以 g 的變率由 w 增至 $\sqrt{w^2 + 2gh} = us$。

總飛行時間為 $2t_1$，所以射程（range）為

$$\begin{aligned} R_1 &= uc \cdot \frac{2(us - w)}{g} = \frac{2\sqrt{8gh}\,c}{g}\left(2\sqrt{2gh}\,s - \sqrt{2gh}\sqrt{4s^2 - 1}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{8gh}\sqrt{2gh}}{g}\,c(2s - \sqrt{4s^2 - 1}) = 8h\cos\alpha\left(2\sin\alpha - \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\right), \end{aligned}$$

當中用到 $us = \sqrt{8gh}\,s = 2\sqrt{2gh}\,s$ 及 $\sqrt{8gh}\sqrt{2gh} = 4gh$。這就是所求的射程。

P_2 的射程與差距 D

P_2 沿相同的路徑上升至天花板，所需時間為 t_1。碰撞是完全非彈性的，所以它的鉛垂速度變為零；天花板是光滑的，所以水平速度仍然是 uc。其後它從靜止下落高度 h，所需時間為 $\sqrt{2h/g}$。因此

$$R_2 = uc\left(t_1 + \sqrt{\tfrac{2h}{g}}\right), \qquad R_2 - R_1 = uc\left(\sqrt{\tfrac{2h}{g}} - t_1\right).$$

現在

$$t_1 = \frac{\sqrt{2gh}\,(2s - \sqrt{4s^2 - 1})}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,(2s - \sqrt{4s^2 - 1})$$

而 $uc\sqrt{2h/g} = \sqrt{8gh}\sqrt{2h/g}\,c = 4hc$，所以

$$R_2 - R_1 = 4h\cos\alpha\left(1 - 2\sin\alpha + \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\right).$$

當 $\frac{1}{6}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ 時，此式為正：對於 $s > \frac{1}{2}$，我們有 $(2s-1)^2 = 4s^2 - 1 - 2(2s-1) < 4s^2 - 1$，所以 $2s - 1 < \sqrt{4s^2 - 1}$。因此 P_2 總是落在較遠處（彈性反彈令 P_1 更快地被拋回地面），而

$$D = 4h\cos\alpha\left(1 - 2\sin\alpha + \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\right).$$

求 D 的極大值

設 $f(\alpha) = D/(4h) = c(1-2s) + cr$，其中 $r = \sqrt{4s^2-1}$，定義於 $\frac{1}{6}\pi \le \alpha < \frac{1}{2}\pi$。留意 $f(\frac{1}{6}\pi) = 0$，當 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ 時 $f \to 0$（因為 $c \to 0$），而在兩者之間 $f > 0$。求導（differentiate），並利用 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{4sc}{r}$，得

$$f'(\alpha) = -s(1-2s) - 2c^2 - sr + \frac{4sc^2}{r}.$$

代入 $c^2 = 1-s^2$，再乘以 $r > 0$（當 $\alpha > \frac{1}{6}\pi$）：

$$\begin{aligned} rf'(\alpha) &= (4s^2 - s - 2)\,r - sr^2 + 4s(1-s^2) \\ &= (4s^2 - s - 2)\,r - s(8s^2 - 5). \end{aligned}$$

當 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 時，$s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 而 $r = 1$，得出 $(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - 2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(4-5) = 0$。所以 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 是一個駐點（stationary point）。

> **想一想** 我們怎樣知道它就是極大值，而不是別的駐點？

在任何駐點，都有 $(4s^2 - s - 2)r = s(8s^2 - 5)$。兩邊平方並利用 $r^2 = 4s^2 - 1$，展開後因式分解，得

$$(4s^2 - s - 2)^2(4s^2 - 1) - s^2(8s^2 - 5)^2 = -2(2s^2 - 1)(8s^3 - s^2 - 2s - 2),$$

所以每個駐點都滿足 $s^2 = \frac{1}{2}$ 或 $q(s) = 8s^3 - s^2 - 2s - 2 = 0$。在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上，$q'(s) = 24s^2 - 2s - 2 > 0$，所以 q 是遞增的；由於 $q(0.8) = -0.144 < 0 < 0.0985 = q(0.82)$，它在該區間內唯一的根位於 $(0.8, 0.82)$ 之內。但對於這樣的 s，

$$4s^2 - s - 2 < 4(0.82)^2 - 0.8 - 2 < 0, \qquad 8s^2 - 5 > 8(0.8)^2 - 5 > 0,$$

所以左邊 $(4s^2 - s - 2)r$ 為負，右邊 $s(8s^2 - 5)$ 為正：這個根是平方時產生的，並不是駐點。因此 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 是 $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 內唯一的駐點。由於 f 是連續的，在區間內部為正，而在兩端為零（或趨向零），它在區間內部必有極大值，而這極大值必定出現在這個駐點。所以當 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 時 D 最大，且

$$D_{\max} = 4h \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2} + 1) = 4h(\sqrt{2} - 1).$$

驗算

- 當 $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ 時，質點剛好觸及天花板，所以兩個質點的結果應該一致：果然 $D = 0$，而 $R_1 = 8h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,h$ 正是慣常的射程 $u^2 \sin 2\alpha / g$。
- 取 $h = 1.7\,\mathrm{m}$，在 $\alpha = 1$ 時以數值方法逐步計算兩個運動，得 $R_1 \approx 2.420\,\mathrm{m}$ 及 $D \approx 2.464\,\mathrm{m}$，與公式吻合。對 α 作細密搜尋，得出 $D/(4h)$ 的極大值位於 $\alpha = 0.78540 \approx \frac{1}{4}\pi$，其值為 $0.41421 \approx \sqrt{2} - 1$。

常見錯誤

- 由 $h = ust - \frac{1}{2}gt^2$ 解出 t_1 時取了較大的根；那其實是假如沒有天花板，質點在下落途中經過高度 h 的時間。
- 寫成 $D = R_1 - R_2$，這是負數：非彈性碰撞的質點落在較遠處。
- 得出 $f'(\frac{1}{4}\pi) = 0$ 便停下來，沒有證明這個駐點是極大值。

STEP 之外

對 P_1 所用的時間反演（time reversal）論證，讓我們初次窺見一個深刻的事實：在保守力（conservative force）作用下，牛頓（Newton）定律在時間倒流時形式不變；完全彈性碰撞保持這種對稱性，而非彈性碰撞（會損失能量）則破壞了它。介乎 0 與 1 之間的恢復係數（coefficient of restitution），會給出介乎這裏求得的兩個射程之間的結果。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）正是以這種精神處理碰撞與能量守恆。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。