詳細解答

STEP III 1991，第 12 題

力學 • 曲線上的運動

> **STEP III 1991，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q12

關鍵思路

質點被約束在橢圓上，所以它的位置完全由單一參數 θ 決定。把位置向量（position vector）對時間求導兩次，再把加速度投影到向內的單位法向量（inward unit normal）上：含 $\ddot{\theta}$ 的項會消去，因為它們沿切線方向。至於第二部分，當法向反作用力（normal reaction）降至零時，質點便離開表面；而管是光滑的，所以由能量守恆（energy conservation）可求得每一點的速率。

解答

法向加速度

我們把質點視為在光滑曲線上運動的一點，因此它只受兩個力：向下的重量 mg，以及管所施的法向反作用力 R。

位置為 $\mathbf{r} = (a\cos\theta,\ b\sin\theta)$。利用鏈式法則（chain rule）對時間求導，

$$\dot{x} = -a\sin\theta\,\dot{\theta}, \qquad \dot{y} = b\cos\theta\,\dot{\theta},$$
$$\ddot{x} = -a\sin\theta\,\ddot{\theta} - a\cos\theta\,\dot{\theta}^2, \qquad \ddot{y} = b\cos\theta\,\ddot{\theta} - b\sin\theta\,\dot{\theta}^2.$$

切線方向為 $(-a\sin\theta,\ b\cos\theta)$，所以 $(b\cos\theta,\ a\sin\theta)$ 是一個法線方向（兩者的點積（dot product）為 0）。在 $\theta = 0$ 時，它等於 $(b, 0)$，指向橢圓之外，因此向內的單位法向量為

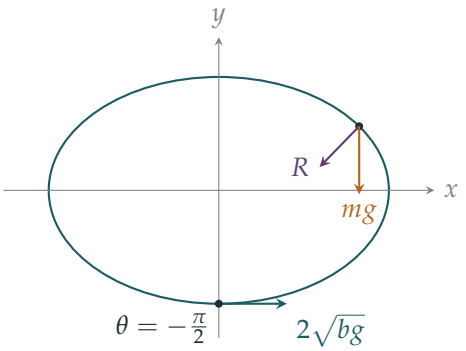
$$\mathbf{n} = -\frac{(b\cos\theta,\ a\sin\theta)}{D}, \qquad D = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}.$$

於是沿向內法線方向的加速度為

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n} &= -\frac{1}{D}\Big[b\cos\theta(-a\sin\theta\,\ddot\theta - a\cos\theta\,\dot\theta^2) + a\sin\theta(b\cos\theta\,\ddot\theta - b\sin\theta\,\dot\theta^2)\Big]\\ &= -\frac{1}{D}\Big[-ab\,\dot\theta^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\Big] = \frac{ab\,\dot\theta^2}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}},\end{aligned}$$

因為兩個含 $\ddot\theta$ 的項互相抵消。這正是所求的結果。

離開表面



最低點對應 $\theta = -\frac{\pi}{2}$，該處 $y = -b$。管是光滑的，所以反作用力不作功，能量守恆。設質點在參數為 θ 的點上速率為 v，則

$$\tfrac12 mv^2 + mgb\sin\theta = \tfrac12 m(4bg) - mgb \quad\Longrightarrow\quad v^2 = 2gb(1-\sin\theta).$$

由第一部分，$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = D^2\dot\theta^2$，所以 $\dot\theta^2 = v^2/D^2$。

現在沿向內法線 $\mathbf{n}$ 的方向分解各力。反作用力 R 沿 $\mathbf{n}$ 作用（質點在內側，所以管向內推，而且只要仍有接觸便有 $R \ge 0$）。重量為 $(0,-mg)$，它沿 $\mathbf{n}$ 的分量是 $(0,-mg)\cdot\mathbf{n} = mga\sin\theta/D$。由牛頓第二定律（Newton's second law）得

$$R + \frac{mga\sin\theta}{D} = \frac{m\,ab\,\dot\theta^2}{D} = \frac{m\,ab\,v^2}{D^3}, \qquad \text{所以} \qquad R = \frac{ma}{D^3}\Big(bv^2 - g\sin\theta\,D^2\Big).$$

想一想 為甚麼重量的分量是 $+mga\sin\theta/D$，而不是帶負號？

在上半部分（$\sin\theta > 0$），向內法線有向下的分量，所以重力在那裏有助把質點拉向內側，情況就如在鉛垂圓周的頂部一樣。R 和重量的這個分量共同提供向心加速度（centripetal acceleration）。

現在代入 $a = \frac32 b$ 和 $v^2 = 2gb(1-\sin\theta)$，並記 $s = \sin\theta$。那麼

$$D^2 = \tfrac94 b^2 s^2 + b^2(1-s^2) = b^2(1+\tfrac54 s^2),$$

所以

$$bv^2 - g\sin\theta\, D^2 = gb^2\left[2(1-s) - s(1+\tfrac{5}{4}s^2)\right] = -\tfrac{1}{4}gb^2(5s^3+12s-8).$$

由於 $ma/D^3 > 0$，R 的正負號與 $-(5s^3+12s-8)$ 的正負號相同。

質點在 R 首次變為零之處離開表面。函數 $p(s) = 5s^3+12s-8$ 嚴格遞增（strictly increasing），因為 $p'(s) = 15s^2+12 > 0$，而且 $p(-1) = -25 < 0$，$p(1) = 9 > 0$。所以 p 在 $(-1,1)$ 內恰有一個根。質點由最低點上升時，s 由 -1 開始遞增，在 s 到達該根之前一直有 $R > 0$。此外，對所有 $s < 1$ 都有 $v^2 = 2gb(1-s) > 0$，所以質點到達該處時仍在沿管向上運動。因此 R 首次變為零、質點離開表面的位置滿足

$$5\sin^3\theta + 12\sin\theta - 8 = 0,$$

正如所求。數值上，$\sin\theta \approx 0.584$，所以質點在略高於軸的水平之處離開。

驗算

- 若 $a = b = r$，法向加速度變成 $r\dot{\theta}^2 = v^2/r$，即熟悉的圓周運動結果。
- 在最低點，$R = m\left(\frac{bv^2}{a^2} + g\right)$，其中 $v^2 = 4bg$，其值為正（該處的曲率半徑（radius of curvature）為 a^2/b），與 $p(-1) = -25 < 0$ 吻合。
- 取 $b = 1$、$a = 1.5$ 和 $g = 9.81$，我們由最低點開始，逐步對以 θ 表示的運動方程作數值積分。反作用力首次變為零時 $\sin\theta \approx 0.58379$，與三次方程的根 0.58377 相符（$\theta \approx 35.7°$）。

常見錯誤

- 把 θ 當作極角（polar angle）。除非 $a = b$，否則點 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 與 x 軸的夾角並不是 θ，法線也不沿半徑方向。
- 以 v^2/b 或 v^2/a 作為法向加速度。在橢圓上，曲率半徑逐點不同，而這正是第一部分所計算的。
- 弄錯重量法向分量的正負號，結果三次式變成 $5s^3 - 4s + \ldots$，得不到合理的根。

STEP 之外

第一部分是法向加速度公式 v^2/ρ 的特殊情況，其中 ρ 是曲率半徑。事實上，這個橢圓的 $\rho = D^3/(ab)$。把加速度分解為切向和法向兩部分（弗勒內標架（Frenet frame）），是大學一年級力學和微分幾何（differential geometry）的標準內容。以單一坐標 θ 處理約

束，自然引向拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對約束運動，以及極坐標和內稟坐標（intrinsic coordinates），都有很好的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。