詳細解答

STEP III 1991，第 11 題

力學 • 剛體平衡

STEP III 1991，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

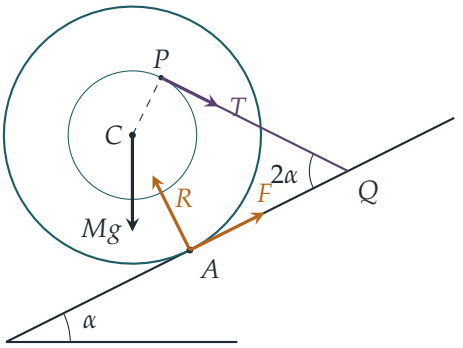
step.maths.org/questions/91-s3-q11

關鍵思路

圓柱體是一個剛體（rigid body），在四個力的作用下處於平衡（equilibrium）：重力、法向反作用力(normal reaction)、接觸點處的摩擦力(friction)，以及繩子的張力(tension)。其中重力和法向反作用力都通過圓柱體的中心，所以對中心取力矩（moments），便可把摩擦力與張力直接聯繫起來。再沿斜面方向和垂直於斜面方向分解力，就得到摩擦力和法向反作用力，餘下的工作交給不等式 $F \leq \mu R$ 即可。在第二部分，圓柱體並不「知道」是甚麼東西拉住繩子，所以張力不變，我們只需考慮質點。

解答

我們把圓柱體看作均勻剛體，其質心（centre of mass）就是它的中心 C；把繩子看作輕而不可伸長（light and inextensible）；把第二個物體看作質點（particle）。設 A 為圓柱體與斜面的接觸點，並設繩子的張力為 T。由於繩子繞在凹槽上，自由的一段 PQ 在 P 點與凹槽相切，所以它的作用線與 C 的垂直距離為 a。由圖可見，Q 在斜面上的位置比 A 更高，而繩子把圓柱體由 P 拉向 Q：既沿斜面向上，也壓向斜面，與斜面成 2α 角。



虛線所示的半徑 CP 長度為 a，並與繩子垂直。我們以 F 表示作用於圓柱體的摩擦力，以沿斜面向上為正。

圓柱體：證明 $\mu \geq \frac{1}{3}\tan\alpha$

對 C 取力矩。重力作用於 C，法向反作用力沿 AC 作用，所以兩者對 C 都沒有力矩。摩擦力的作用點與 C 相距 $2a$，張力的作用線與之垂直距離為 a，兩者使圓柱體朝相反方向轉動，所以

$$F \cdot 2a = T \cdot a, \qquad \text{即} \qquad T = 2F.$$

想一想 為甚麼摩擦力和張力會使圓柱體朝相反方向轉動？

只有這兩個力對 C 有力矩，所以它們的力矩必須互相抵消。單靠繩子在 P 點的拉力，圓柱體會轉動而沿斜面向上滾。A 點處沿斜面向上的摩擦力則使它朝另一方向轉動。假如我們猜錯了摩擦力的方向，下面的方程只會給出 $F < 0$，所以這個正負號並不是額外的假設。

沿斜面方向分解（以沿斜面向上為正）：

$$F + T\cos 2\alpha = Mg\sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad F(1+2\cos 2\alpha) = Mg\sin\alpha.$$

垂直於斜面方向分解：張力有一個壓向斜面的分量 $T\sin 2\alpha$，所以

$$R = Mg\cos\alpha + T\sin 2\alpha = Mg\cos\alpha + 2F\sin 2\alpha.$$

代入 $F = Mg\sin\alpha/(1+2\cos 2\alpha)$，

$$\begin{aligned} R(1+2\cos 2\alpha) &= Mg(\cos\alpha + 2\cos 2\alpha\cos\alpha + 2\sin 2\alpha\sin\alpha) \\ &= Mg(\cos\alpha + 2\cos(2\alpha-\alpha)) = 3Mg\cos\alpha. \end{aligned}$$

因此

$$F = \frac{Mg\sin\alpha}{1+2\cos 2\alpha}, \qquad R = \frac{3Mg\cos\alpha}{1+2\cos 2\alpha}.$$

圓柱體保持與斜面接觸，所以 $R > 0$。由於 α 是銳角，$\cos\alpha > 0$，於是 $1 + 2\cos 2\alpha > 0$，這表示 $F > 0$ 亦成立。兩式相除，

$$\frac{F}{R} = \frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha} = \tfrac{1}{3}\tan\alpha.$$

要保持平衡，摩擦力必須滿足 $F \le \mu R$，所以 $\mu \ge F/R = \frac{1}{3}\tan\alpha$，正是所要證明的結果。

質點：摩擦系數的最小值

繩子留在原來的位置，所以圓柱體的位置完全相同，它的三條方程也不變。特別是，張力仍然是

$$T = 2F = \frac{2Mg\sin\alpha}{1 + 2\cos 2\alpha}.$$

當 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ 時，我們有 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 和 $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$，所以

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{3}{5}, \qquad \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{4}{5},$$

而 $1 + 2\cos 2\alpha = \frac{11}{5}$。因此

$$T = \frac{2Mg}{\sqrt{5}} \cdot \frac{5}{11} = \frac{2\sqrt{5}}{11}Mg.$$

（圓柱體同時需要 $\mu \ge \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$。）

現在考慮位於 Q 的質點。繩子把它拉向 P，也就是說，拉力有沿斜面向下的分量 $T\cos 2\alpha$，以及離開斜面的分量 $T\sin 2\alpha$。它的重力 $3Mg$ 同樣有沿斜面向下的分量，所以作用於質點的摩擦力 F' 必定沿斜面向上。設作用於質點的法向反作用力為 R'。

沿斜面方向：

$$F' = 3Mg\sin\alpha + T\cos 2\alpha = \frac{3Mg}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{11}Mg = \frac{33\sqrt{5}}{55}Mg + \frac{6\sqrt{5}}{55}Mg = \frac{39\sqrt{5}}{55}Mg.$$

垂直於斜面方向：

$$R' = 3Mg\cos\alpha - T\sin 2\alpha = \frac{6Mg}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{11}Mg = \frac{66\sqrt{5}}{55}Mg - \frac{8\sqrt{5}}{55}Mg = \frac{58\sqrt{5}}{55}Mg.$$

這是正數，所以質點確實留在斜面上。平衡的條件是 $F' \le \mu' R'$，其中 μ' 是質點與斜面之間的摩擦系數（coefficient of friction），所以

$$\mu' \ge \frac{F'}{R'} = \frac{39}{58}.$$

摩擦系數的最小值是 $\dfrac{39}{58}$。

驗算

- 改為對 A 取力矩，得 $T\,a(1+2\cos 2\alpha) = 2a\,Mg\sin\alpha$，張力相同。（由 A 到繩子的垂直距離是 $a + 2a\cos 2\alpha$。）
- 當 $\alpha \to 0$ 時，斜面變成水平，張力和摩擦力都消失，而下界 $\frac{1}{3}\tan\alpha \to 0$，與預期相符。
- 數值驗算：隨機選取 10 000 個小於 60° 的銳角 α，用坐標建立幾何圖形，解出平衡方程，確認 $F/R = \frac{1}{3}\tan\alpha$。當 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ 時，結果是 $T \approx 0.4066\,Mg$、$F' \approx 1.5856\,Mg$、$R' \approx 2.3580\,Mg$，以及 $F'/R' \approx 0.67241 = 39/58$。

常見錯誤

- 忘記張力會把圓柱體壓向斜面，令 R 增大。漏掉 $T\sin 2\alpha$ 會得出錯誤的比值。
- 弄錯繩子對質點的拉力方向。繩子把質點拉向 P，所以它減少了作用於質點的法向反作用力，並加大了沿斜面向下的力。
- 在第二部分從頭重新計算張力。圓柱體的平衡沒有改變，所以 T 也沒有改變。

STEP 之外

剛體靜力學（statics）歸結為兩條向量方程：合力為零，以及對任何一點的總力矩為零。選好這一點是最主要的技巧；本題選的是中心，因為有兩個未知的力通過它。到了大學，這會發展成對力系及其等效「力螺旋」（wrench）的研究。摩擦力問題還會引出平衡如何被破壞的問題：是滑動、滾動，還是翻倒。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對剛體靜力學和轉動有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。