詳細解答

STEP III 1991，第 10 題

純數學 • 牛頓恆等式

> **STEP III 1991，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q10

關鍵思路

這個多項式只有三個非零係數，所以對稱函數（symmetric function）Σ_m 幾乎全部為零，而題目給出的恆等式（牛頓恆等式，Newton's identity）就簡化成一個只有兩項的遞推關係（recurrence）。次數超過 n 之後，這個恆等式不再適用，但有一個更簡單的做法：每個根都滿足方程本身，所以把方程乘以 α^k 再對所有根求和，便可把 S_{n+k} 與較早的冪和（power sum）聯繫起來。

解答

直到 S_{n-1} 的冪和

把 $x^n - qx^{n-1} + r$ 與 $\prod_i (x - \alpha_i) = x^n - \Sigma_1 x^{n-1} + \Sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \Sigma_n$ 比較，可得

$$\Sigma_1 = q, \qquad \Sigma_2 = \Sigma_3 = \cdots = \Sigma_{n-1} = 0, \qquad (-1)^n \Sigma_n = r.$$

在題目給出的恆等式中取 $1 \le p \le n-1$。由於 $p \le n-1$，所有含有 $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$ 的項都等於零。（當 $p = 1$ 時，恆等式就是 $S_1 - \Sigma_1 = 0$。）剩下的是

$$S_p - q\, S_{p-1} = 0 \quad (2 \le p \le n-1), \qquad S_1 = q.$$

所以 $S_1 = q$，而每個冪和都是前一個的 q 倍。對 p 用歸納法（induction），得

$$S_p = q^p \qquad \text{對於} 1 \le p \le n-1,$$

這正是所要證明的結果。另外，由於每個 $\alpha_i^0 = 1$，順帶記下 $S_0 = n$ 會很方便。

S_n、S_{n+1} 和 S_{n+2}

當 $p = n$ 時，恆等式仍然適用，而這次最後一項會出現：

$$S_n - q\,S_{n-1} + (-1)^n n\,\Sigma_n = 0.$$

由於 $(-1)^n\Sigma_n = r$，由此得

$$S_n = q \cdot q^{n-1} - nr = q^n - nr.$$

想一想 題目給出的恆等式到 $p = n$ 就停了。怎樣才能再走下去？

我們利用方程本身。每個根都滿足 $\alpha_i^n = q\alpha_i^{n-1} - r$。乘以 α_i^k（其中 $k \geq 0$）再對 i 求和，得

$$S_{n+k} = q\,S_{n+k-1} - r\,S_k \qquad (k \geq 0). \tag{$*$}$$

取 $k = 0$，這再次給出 $S_n = q^n - nr$，是一個令人安心的交叉驗證。現在

$$S_{n+1} = q\,S_n - r\,S_1 = q^{n+1} - nqr - qr = q^{n+1} - (n+1)qr,$$
$$S_{n+2} = q\,S_{n+1} - r\,S_2 = q^{n+2} - (n+1)q^2r - q^2r = q^{n+2} - (n+2)q^2r.$$

這裏用到了 $S_1 = q$ 和 $S_2 = q^2$；它們成立，是因為 $n \geq 5$ 保證了 $2 \leq n-1$。

一般公式

從 $S_n = q^n - nr$、$S_{n+1} = q^{n+1} - (n+1)qr$、$S_{n+2} = q^{n+2} - (n+2)q^2r$ 這個規律，可以猜想

$$S_{n+m} = q^{n+m} - (n+m)\,q^m r \qquad \text{對於} 0 \leq m \leq n-1.$$

我們對 m 用歸納法來證明。$m = 0$ 的情況就是 $S_n = q^n - nr$，上面已經證明。

假設公式對某個 $m-1$ 成立，其中 $1 \leq m \leq n-1$。在 $(*)$ 中取 $k = m$，得

$$\begin{aligned} S_{n+m} &= q\,S_{n+m-1} - r\,S_m \\ &= q(q^{n+m-1} - (n+m-1)q^{m-1}r) - r\,q^m \\ &= q^{n+m} - (n+m)\,q^m r, \end{aligned}$$

其中用到了 $S_m = q^m$，這是因為 $1 \leq m \leq n-1$ 才成立。這就是 m 的情況下的公式。根據歸納法，公式對所有 $0 \leq m \leq n-1$ 成立，即對 $m < n$ 成立。

想一想 條件 $m < n$ 究竟在哪裏用到？

只在 $S_m = q^m$ 這一步。當 $m = n$ 時，我們需要的是 S_n，而它等於 $q^n - nr$，不是 q^n，於是多出來的 $-nr$ 會帶進計算之中，規律就此打破。事實上，由 $(*)$ 可得 $S_{2n} = q^{2n} - 2nq^nr + nr^2$。

驗算

- 當 $r = 0$ 時，方程是 $x^{n-1}(x-q) = 0$，根為 q 和 0（重複 $n-1$ 次），所以每個 $S_k = q^k$。我們所有的公式都化為這個結果。
- 當 $q = 0$ 時，各根就是 $-r$ 的 n 次方根。於是對於 $1 \le p \le n-1$ 有 $S_p = 0$，而 $S_n = n \cdot (-r) = -nr$，與 $q^n - nr$ 吻合。
- 數值上，我們對隨機選取的 q, r 和 $5 \le n \le 9$ 求出所有根，再把它們的冪加起來。$S_p = q^p$ 以及 S_{n+m} 的公式（$0 \le m \le n-1$）都吻合至約 10^{-12} 的誤差，而在 $m = n$ 時公式明顯不成立。

常見錯誤

- 忘記恆等式最後一項的因子 p，結果得出 $S_n = q^n - r$ 而不是 $q^n - nr$。
- 弄錯 Σ_n 的正負號：常數項是 $(-1)^n \Sigma_n$，所以不論 n 是奇是偶，都有 $(-1)^n n\Sigma_n = nr$。
- 在 $p > n$ 時套用題目給出的恆等式，而照題目所寫的形式，它在這個範圍並不成立。

STEP 之外

這些就是牛頓恆等式，而 $(*)$ 表明各冪和滿足一個線性遞推關係（linear recurrence），其特徵多項式（characteristic polynomial）正是原來的方程。用矩陣（matrix）的語言來說，S_k 是 A^k 的跡（trace），其中 A 是該多項式的友矩陣（companion matrix）。各根的任何對稱多項式（symmetric polynomial）都可以用 Σ_m 表示，這個事實就是對稱多項式基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials），由此可以通往伽羅瓦理論（Galois theory）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是了解這套代數如何展開的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。