詳細解答

STEP III 1991，第 1 題

純數學 • 級數與展開式

STEP III 1991，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/91-s3-q1

關鍵思路

三個部分都值得先想一想才動手計算。在 (i) 中，部分分式（partial fractions）把和式拆成可以裂項相消（telescope）的幾部分。在 (ii) 中，三次式 $1+x+x^2+x^3$ 是一個等比級數（geometric series），因此可以寫成兩個非常簡單的式子之商，而對數亦隨之分拆成兩個標準級數。在 (iii) 中，先把指數寫成級數；由於它由 x^2 開始，指數級數（exponential series）中只有頭幾項能夠到達 x^4。

解答

第 (i) 部分

我們要找出常數，使得

$$\frac{6}{r(r+1)(r+3)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r+1} + \frac{C}{r+3}.$$

利用掩蓋法（cover-up rule），$A = \dfrac{6}{1\cdot 3} = 2$，$B = \dfrac{6}{(-1)(2)} = -3$ 及 $C = \dfrac{6}{(-3)(-2)} = 1$。（快速檢查一下：$A+B+C=0$，這是必然的，因為當 r 很大時，左方的表現有如 $6/r^3$，並沒有 $1/r$ 項。）

係數 $2, -3, 1$ 之和為零，這提示我們把它們拆成 $2-2$ 和 $-1+1$：

$$\frac{6}{r(r+1)(r+3)} = 2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) - \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+3}\right).$$

現在每個括號都可以裂項相消。第一個給出

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

在第二個之中，兩項相隔兩步，因此兩端各有兩項留下：

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r+3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}.$$

把它們合起來，

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}\frac{6}{r(r+1)(r+3)}&=2-\frac{2}{n+1}-\frac{5}{6}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\\&=\frac{7}{6}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}.\end{aligned}$$

第 (ii) 部分

想一想 $1+x+x^2+x^3$ 有沒有更簡潔的寫法？

它是公比為 x 的等比級數，所以當 $x\neq 1$ 時

$$1+x+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}.$$

當 $|x|<1$ 時，$1-x^4$ 和 $1-x$ 均為正數，所以我們可以把對數拆開：

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln(1-x^4)-\ln(1-x).$$

利用 $\ln(1-y)=-\sum_{k\geq 1}y^k/k$，此式對 $|y|<1$ 成立（而這裏亦有 $|x^4|<1$），

$$-\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k},\qquad \ln(1-x^4)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{4m}}{m}.$$

第二個級數只涉及 k 為 4 的倍數的冪 x^k。對於這樣的 $k=4m$，合併後的係數為

$$\frac{1}{4m}-\frac{1}{m}=-\frac{3}{4m}=-\frac{3}{k}.$$

因此

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots,$$

而通項為

$$\frac{x^k}{k}\ \text{若}\ 4\nmid k,\qquad -\frac{3x^k}{k}\ \text{若}\ 4\mid k.$$

每個係數都不是零，所以上面列出的五項就是首五個非零項。

第 (iii) 部分

當 $-1<x\leq 1$ 時，我們有 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$，所以

$$u=x\ln(1+x)=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\cdots.$$

想一想 $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \cdots$ 之中，我們需要多少項？

由於 u 由 x^2 開始，u^k 這一項便由 x^{2k} 開始。所以 u^3 及其後各項對 x^4 或以下的項毫無貢獻，而從 u^2 我們只需要它的首項 x^4。因此

$$\begin{aligned} e^{x\ln(1+x)} &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{2}x^4 + \cdots \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + \cdots . \end{aligned}$$

（當然，$e^{x\ln(1+x)}$ 其實就是 $(1+x)^x$。）

驗算

- 在 (i) 中，$n = 1$ 給出 $\frac{7}{6} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$，與單獨一項 $\frac{6}{1\cdot 2\cdot 4}$ 吻合。令 $n \to \infty$，便得無窮項之和 $\frac{7}{6}$。
- 在 (ii) 中，直接展開至二階：取 $\ln(1+y) \approx y - \frac{y^2}{2}$，其中 $y = x + x^2 + \cdots$，得出 $x + x^2 - \frac{x^2}{2} = x + \frac{x^2}{2}$，與我們的首兩項一致。數值上，在 $x = 0.5$ 時，把級數加至很多項，結果與 $\ln 1.875 \approx 0.6286$ 吻合。
- 在 (iii) 中，在 $x = 0.01$ 時，展開式與 $(1.01)^{0.01}$ 相差約 7.4×10^{-11}，其大小屬 x^5 的量級，正如所料（下一個係數原來是 $-\frac{3}{4}$）。

常見錯誤

- 在 (i) 中，忘記了相隔兩步的裂項和會在兩端各留下兩項，而不是一項。
- 在 (ii) 中，把 x^4 的係數寫成 $\frac{1}{4} - 1$，但其後卻把通項寫成 $(-1)^{k+1}x^k/k$ 或類似的式子；其實規律取決於 k 除以 4 的餘數。
- 在 (iii) 中，漏掉 $\frac{1}{2}u^2$ 這一項：它貢獻了 $\frac{1}{2}x^4$。

STEP 之外

第 (iii) 部分是冪級數（power series）複合的一個小例子，而追蹤每一項中最低次冪這個記帳技巧，正是大學裏處理漸近展開式（asymptotic expansions）的方法。冪級數何時收斂，以及為何在收斂半徑（radius of convergence）之內可以隨意把它們相加、相乘和複合，這些問題都是分析學（analysis）入門課程的內容；Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教材）對此有清晰的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。