詳細解答

STEP II 1991，第 8 題

純數學 • 非線性一階常微分方程

> **STEP II 1991，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q8

關鍵思路

兩條微分方程（differential equation）都是關於 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的二次方程（quadratic），所以我們可以先用代數方法解出導數（derivative），然後才積分。每條二次方程有兩個根，於是得到兩條候選的一階方程，而 $x = 0$ 處的條件決定了哪一個分支（branch）可取。雙曲恆等式（hyperbolic identities），尤其是 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 和半角公式（half-angle formulae），可令這些根保持簡潔。

解答

二次方程

由二次公式（quadratic formula），

$$u = \frac{-2\sinh x \pm \sqrt{4\sinh^2 x + 4}}{2} = -\sinh x \pm \sqrt{\sinh^2 x + 1} = -\sinh x \pm \cosh x,$$

當中用到 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 和 $\cosh x > 0$。由於 $\cosh x - \sinh x = \mathrm{e}^{-x}$ 而 $\cosh x + \sinh x = \mathrm{e}^{x}$，兩個根是

$$u = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{或} \qquad u = -\mathrm{e}^{x}.$$

（驗算：兩根之積是 -1，兩根之和是 $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x} = -2\sinh x$，與應有的結果相符。）

第一條微分方程

取 $u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，這正是上面的二次方程，所以對每一個 x，要麼 $y' = \mathrm{e}^{-x}$，要麼 $y' = -\mathrm{e}^{x}$。

想一想 y' 會不會在某些 x 值上取其中一個根，而在其他地方取另一個根？

不會。第一個根恆為正，第二個根恆為負，所以兩者永不相遇。導數具有介值性質（intermediate value property）（達布定理（Darboux's theorem）；如果你假設 y' 連續，則用普通的介值定理（intermediate value theorem）即可），所以 y' 不可能由正值跳到負值而不經過 0，但兩個根都不會取這個值。因此 y' 自始至終都停留在同一個根上。

在 $x = 0$ 處，兩個根是 1 和 -1，而我們需要 $y' > 0$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x}$。積分得 $y = -\mathrm{e}^{-x} + c$，而由 $x = 0$ 時 $y = 0$ 可得 $c = 1$：

$$\boxed{y = 1 - \mathrm{e}^{-x}}$$

第二條微分方程

設 $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，則 $p^2 \sinh x + 2p - \sinh x = 0$。

當 $x = 0$ 時，$\sinh 0 = 0$，方程簡化為 $2p = 0$，所以必定有 $y'(0) = 0$。

當 $x \neq 0$ 時，$\sinh x \neq 0$，由二次公式得

$$p = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\sinh^2 x}}{2\sinh x} = \frac{-1 \pm \cosh x}{\sinh x}.$$

利用 $\cosh x = 1 + 2\sinh^2 \frac{x}{2} = 2\cosh^2 \frac{x}{2} - 1$ 和 $\sinh x = 2\sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}$，兩個根可化簡為

$$\frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{2\sinh^2 \frac{x}{2}}{2\sinh \frac{x}{2}\cosh \frac{x}{2}} = \tanh \tfrac{x}{2},$$
$$\frac{-1 - \cosh x}{\sinh x} = -\frac{2\cosh^2 \frac{x}{2}}{2\sinh \frac{x}{2}\cosh \frac{x}{2}} = -\coth \tfrac{x}{2}.$$

選擇分支。第二個根 $-\coth \frac{x}{2}$ 當 $x \to 0$ 時無界，把它積分得 $y = -2\ln|\sinh \frac{x}{2}| + c$，而無論從哪一側取 $x \to 0$，這個函數都趨向 $+\infty$。所以在原點的任何一側，這個分支都不能給出在 $x = 0$ 處連續且滿足 $y(0) = 0$ 的解。因此在 $x = 0$ 附近（每一側）我們都必須取第一個根，而由於 $\tanh 0 = 0$，這與 $y'(0) = 0$ 吻合。兩個根永不重合（一個與 x 同號，另一個異號，而且當 $x \neq 0$ 時兩者都不為零），所以根據與之前相同的介值論證，對所有 x，解都停留在這個分支上：

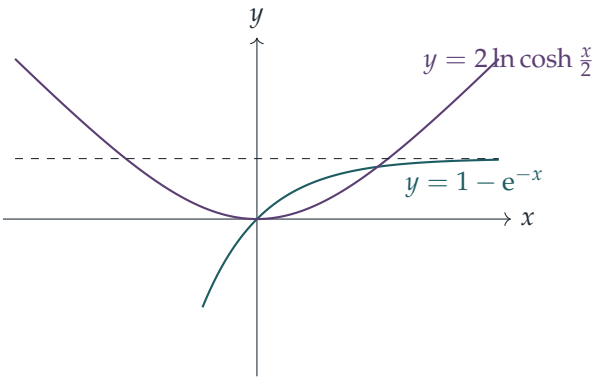
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tanh \tfrac{x}{2} \quad \text{對所有} x.$$

由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sinh \frac{x}{2}$，我們有 $\tanh \frac{x}{2} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}\sinh \frac{x}{2}}{\cosh \frac{x}{2}}$，這屬於 $2f'/f$ 的形式，所以積分得 $y = 2\ln\cosh \frac{x}{2} + c$（因為 $\cosh > 0$，無須加上絕對值符號）。由條件 $y(0) = 0$ 得

$c = 0$，所以

$$\boxed{y = 2\ln\cosh\tfrac{x}{2} = \ln\left(\frac{1+\cosh x}{2}\right)}$$

其中第二個形式由 $2\cosh^2\frac{x}{2} = 1 + \cosh x$ 得出。



驗算

- 對於 $y = 1 - e^{-x}$：$y'^2 + 2y'\sinh x = e^{-2x} + e^{-x}(e^x - e^{-x}) = 1$，符合要求，而且 $y'(0) = 1 > 0$。
- 對於 $y = 2\ln\cosh\frac{x}{2}$，設 $t = \tanh\frac{x}{2}$，則 $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$；於是 $\sinh x\,(t^2 - 1) + 2t = -2t + 2t = 0$。這個解是偶函數，這是理所當然的，因為方程在 $x \mapsto -x$、$y \mapsto y$ 之下保持不變。
- 數值上，在 $x = 1$ 處兩個解分別是 $1 - e^{-1} \approx 0.6321$ 和 $2\ln\cosh\frac{1}{2} \approx 0.2402$；在許多隨機選取的點代入有限差分導數，兩條方程都成立，誤差在 10^{-6} 以內。

常見錯誤

- 把第二條方程除以 $\sinh x$，卻沒有留意它在 $x = 0$ 處為零，而那裏正是初始條件（initial condition）所在之處；原方程迫使 $y'(0) = 0$。
- 在第二部分保留兩個分支：$-\coth\frac{x}{2}$ 這個分支不可能滿足 $y(0) = 0$，因為它的積分在原點處趨向無窮。

STEP 之外

對 y' 並非線性的方程，例如 $F(x,y,y') = 0$，可以有多個解通過同一點，或者出現沒有任何單一分支能夠描述的「奇異」解（singular solution），所以存在性與唯一性定理（existence and uniqueness theorems，即 Picard–Lindelöf 定理）都是針對已經解成 $y' = f(x,y)$ 形式的方程而敘述的。在這裏兩個根互相分隔，所以每個分支都表現良好；當判別式（discriminant）可以為零時，各分支可以黏合起來，唯一性便不再成立。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（基礎微分方程教科書）討論了存在性、唯一性以及這些非線性一階方程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。