詳細解答

STEP II 1991，第 7 題

純數學 • 函數方程

> **STEP II 1991，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q7

關鍵思路

函數方程（functional equation）對所有 x 和 y 都成立，因此我們可以固定其中一個變量，對另一個變量求導。這樣便把它化為一條微分方程（differential equation），把 g' 在兩個不同點的值聯繫起來。然後巧妙地選取其中一個變量的值，就能確定 g' 在各處的值，最後積分便大功告成。全篇我們都跟題目一樣，假設 g 和 f 可導（differentiable）。

解答

導數關係式

固定 $y>0$，把 $\mathrm{g}(x)+\mathrm{g}(y)=\mathrm{g}(z)$ 對 x 求導。由於 $\mathrm{g}(y)$ 此時是常數，由鏈式法則（chain rule）得

$$\mathrm{g}'(x)=\mathrm{g}'(z)\,\frac{\partial z}{\partial x}.$$

由商法則（quotient rule），

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y(x+y+1)-xy}{(x+y+1)^2}=\frac{y^2+y}{(x+y+1)^2},$$

這就是第一個形式。至於第二個形式，留意 $z+1$ 可以漂亮地因式分解：

$$z+1=\frac{xy+x+y+1}{x+y+1}=\frac{(x+1)(y+1)}{x+y+1},\qquad\text{所以}\qquad z(z+1)=\frac{xy(x+1)(y+1)}{(x+y+1)^2}.$$

除以 $x(x+1)$ 後恰好得到 $\dfrac{y(y+1)}{(x+y+1)^2}$，所以

$$\mathrm{g}'(x)=\frac{y^2+y}{(x+y+1)^2}\,\mathrm{g}'(z)=\frac{z(z+1)}{x(x+1)}\,\mathrm{g}'(z),$$

正如所求。值得把它寫成以下的對稱形式：

$$x(x+1)\,g'(x) = z(z+1)\,g'(z). \qquad (\dagger)$$

推導 $2g'(1) = (u^2+u)g'(u)$

> **想一想** 我們想得到一個對 $(0,1)$ 內每一個 u 都成立的結論。應該固定哪一個變量？固定在甚麼值？

在 $(\dagger)$ 中代入 $x = 1$；左邊變成 $2g'(1)$，而 $z = \dfrac{y}{y+2}$。當 y 取遍 $(0,\infty)$ 時，$\dfrac{y}{y+2} = 1 - \dfrac{2}{y+2}$ 由 0 連續地遞增並趨向 1，所以它取遍所有滿足 $0 < u < 1$ 的值 u（具體來說，$y = \frac{2u}{1-u}$）。因此

$$2g'(1) = (u^2+u)\,g'(u) \qquad \text{對所有} 0 < u < 1.$$

積分

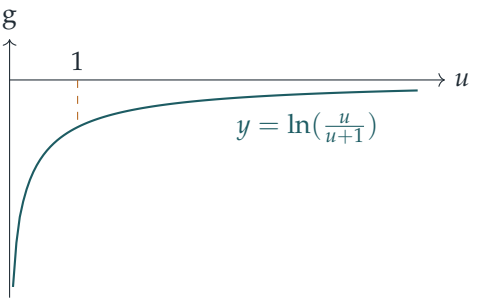
設 $A = 2g'(1)$，這是一個常數。那麼對 $0 < u < 1$，利用部分分式（partial fractions），

$$g'(u) = \frac{A}{u(u+1)} = A\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right),$$

再積分（各項皆為正數，所以不需要絕對值符號），

$$g(u) = A(\ln u - \ln(u+1)) + B = A\ln\left(\frac{u}{u+1}\right) + B.$$

其實這條公式對每一個 $u > 0$ 都成立，而不只是 $u < 1$。對固定的 x，當 y 由 0 增至 ∞ 時，$z = \dfrac{xy}{x+y+1}$ 由 0 遞增並趨向 x，所以我們可以選取 y 使得 $z < 1$。這樣，由 $(\dagger)$ 和上面的結果可得 $x(x+1)g'(x) = z(z+1)g'(z) = A$。因此同樣的積分在整個 $(0,\infty)$ 上都適用，而且只有一個常數 B，因為 $(0,\infty)$ 是一個區間。



（圖中所示的曲線是 $A = 1$、$B = 0$ 的情況：它取負值、遞增，並且當 $u \to \infty$ 時趨向 0。）

驗證 $(*)$ 並求 B

代入 $\mathrm{g}(u) = A\ln\frac{u}{u+1} + B$。$(*)$ 的左邊是

$$\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(y) = A\ln\frac{xy}{(x+1)(y+1)} + 2B.$$

至於右邊，利用先前求得的 $z+1$ 的因式分解，可得

$$\frac{z}{z+1} = \frac{xy}{x+y+1}\cdot\frac{x+y+1}{(x+1)(y+1)} = \frac{xy}{(x+1)(y+1)},$$

所以

$$\mathrm{g}(z) = A\ln\frac{xy}{(x+1)(y+1)} + B.$$

兩邊對所有 $x, y > 0$ 都相等，當且僅當 $2B = B$，即 $B = 0$。所以 $\mathrm{g}(u) = A\ln\dfrac{u}{u+1}$ 滿足 $(*)$。

能否確定 A？

不能。上面的驗證對 A 的每一個值都成立，包括 $A = 0$（零函數）。定義 $A = 2\mathrm{g}'(1)$ 也幫不上忙：對我們的解而言，$\mathrm{g}'(1) = A(1-\frac{1}{2}) = \frac{A}{2}$，所以 $A = 2\mathrm{g}'(1)$ 自動成立，並沒有提供任何新資訊。方程 $(*)$ 對 g 而言是線性的，所以一個解的任何倍數仍然是解，而 A 正是這個比例因子。

函數 f

同樣的方法也適用。固定 $y > 0$，把 $\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(xy)$ 對 x 求導：

$$\mathrm{f}'(x) = y\,\mathrm{f}'(xy).$$

? **想一想** 在這裏，與代入 $x = 1$ 相對應的做法是甚麼？

代入 $x = 1$，得 $\mathrm{f}'(1) = y\,\mathrm{f}'(y)$ 對每一個 $y > 0$ 都成立，所以設 $C = \mathrm{f}'(1)$，便有

$$\mathrm{f}'(y) = \frac{C}{y} \qquad\Longrightarrow\qquad \mathrm{f}(y) = C\ln y + D \quad (y > 0).$$

代回原式，$\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(y) = C\ln(xy) + 2D$，而 $\mathrm{f}(xy) = C\ln(xy) + D$，所以 $D = 0$。（等價地，在方程中取 $x = y = 1$ 得 $2\mathrm{f}(1) = \mathrm{f}(1)$，所以 $\mathrm{f}(1) = 0$。）因此 $\mathrm{f}(x) = C\ln x$，正如所求，而 C 同樣是任意的。

驗算

▶ 取 $x = 1$、$y = 2$：則 $z = \frac{1}{2}$，而兩個導數因子分別是 $\frac{6}{16}$ 和 $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{8}$，兩者相符。

- 取 $A=1$：$\mathrm{g}(1)+\mathrm{g}(2)=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}=\ln\frac{1}{3}$，而 $\mathrm{g}(\frac{1}{2})=\ln\frac{1/2}{3/2}=\ln\frac{1}{3}$。✓
- 我們用電腦以有限差分（finite differences）在 1000 個隨機點上核實了導數恆等式，並對 A 的若干個值核實了 $\mathrm{g}(x)+\mathrm{g}(y)-\mathrm{g}(z)$ 恰好等於 B（所以只有當 $B=0$ 時才等於零）。

常見錯誤

- 對 x 求導時忘記 $\mathrm{g}(y)$ 是常數，或者漏掉鏈式法則的因子 $\partial z/\partial x$。
- 代入了 $x=1$，卻沒有檢查 z 是否真的取遍整個 $(0,1)$；正是這一步，把單獨一條等式變成對每一個 u 都成立的結論。
- 「因為積分常數無關重要」而假定 B 必定是 0：其實是方程 $(*)$ 迫使 $B=0$，而這一點需要證明。

STEP 之外

第二條方程是柯西（Cauchy）對數型函數方程：代入 $x=\mathrm{e}^{s}$ 便把它化為 $h(s+t)=h(s)+h(t)$。這裏我們假設了可導性；在大學第一門分析課程中，你會看到只要在單獨一點連續（continuity），就已經足以迫使 $h(s)=cs$，而如果完全沒有任何正則性條件，就會出現怪異的非線性解（利用哈默爾基（Hamel basis）構造而成）。第一條方程其實是同一回事的變相：$w=\ln\frac{u}{u+1}$ 把 $(*)$ 變換成加性方程。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本實分析入門書）是閱讀這類連續性論證的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。