詳細解答

STEP II 1991，第 6 題

純數學 • 積分的界限

STEP II 1991，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/91-s2-q6

關鍵思路

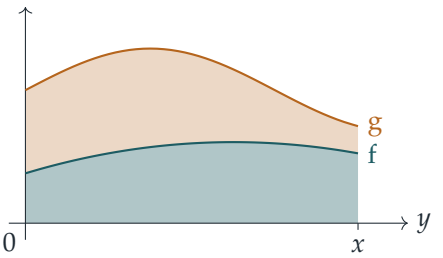
由 0 到 x 的積分（integral）就是面積，而一個較小的非負函數所圍出的面積也較小。只要反覆運用這一個事實，就能把已知的不等式（inequality）變成新的不等式。把 $0 \leq \cos y \leq 1$ 積分，得到 $\sin x$ 的一個界（bound）；再把它積分，得到 $\cos x$ 的一個界；再積分一次，便得到 $\sin x$ 更精確的界。之後每個積分的界，都是把被積函數（integrand）夾在兩個可以準確積分的函數之間而得出的。

解答

比較積分

由於在 $[0, x]$ 上 $\mathrm{f}(y) \geq 0$，f 的圖像位於 y 軸之上或剛好在軸上，所以 $\int_0^x \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y$ 是圖像與軸之間的面積，必為非負。由於 $\mathrm{f}(y) \leq \mathrm{g}(y)$，f 之下的區域包含在 g 之下的區域之內，所以它的面積不會更大：

$$0 \leq \int_0^x \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y \leq \int_0^x \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y.$$



（以分析方式說明：$\mathrm{g} - \mathrm{f} \geq 0$，所以 $\int_0^x (\mathrm{g} - \mathrm{f})\,\mathrm{d}y \geq 0$，而積分是線性的。）

$\sin x$ 與 $\cos x$ 的界

取 $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$。對於 $0 \le y \le x$，我們有 $0 \le \cos y \le 1$，所以在上述結果中取 $\mathrm{f} = \cos$、$\mathrm{g} = 1$，得

$$0 \le \int_0^x \cos y \,\mathrm{d}y \le \int_0^x 1 \,\mathrm{d}y, \qquad \text{即} \qquad 0 \le \sin x \le x.$$

這對 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 內的每一個 x 都成立，所以特別地，當 $0 \le y \le x$ 時有 $0 \le \sin y \le y$。再次應用該結果，這次取 $\mathrm{f} = \sin$、$\mathrm{g}(y) = y$：

$$\int_0^x \sin y \,\mathrm{d}y \le \int_0^x y \,\mathrm{d}y \quad \Longrightarrow \quad 1 - \cos x \le \tfrac{1}{2}x^2 \quad \Longrightarrow \quad \cos x \ge 1 - \tfrac{1}{2}x^2.$$

第一個積分

在 $[0, \frac{1}{10}]$ 上（完全位於 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 之內），我們現在有 $1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos x \le 1$，所以

$$3 - \tfrac{1}{2}x^2 \le 2 + \cos x \le 3.$$

想一想 我們可以直接平方再取倒數嗎？

可以，因為這裏每一個量都是正數：$3 - \frac{1}{2}x^2 \ge 3 - \frac{1}{200} > 0$。對正數而言，平方會保持大小次序，取倒數（reciprocal）則會把次序倒轉。然後乘以 $x \ge 0$，得

$$\frac{x}{9} \le \frac{x}{(2+\cos x)^2} \le \frac{x}{(3 - \frac{1}{2}x^2)^2} \qquad (0 \le x \le \tfrac{1}{10}).$$

三個函數全都非負，所以我們可以由 0 積分到 $\frac{1}{10}$。左邊給出

$$\int_0^{1/10} \frac{x}{9} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1800}.$$

至於右邊，分子 x 除正負號外正是 $3 - \frac{1}{2}x^2$ 的導數（derivative），而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3 - \frac{1}{2}x^2)^{-1} = x(3 - \frac{1}{2}x^2)^{-2}$。所以

$$\int_0^{1/10} \frac{x}{(3 - \frac{1}{2}x^2)^2} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3 - \frac{1}{2}x^2}\right]_0^{1/10} = \frac{200}{599} - \frac{1}{3} = \frac{600 - 599}{1797} = \frac{1}{1797}.$$

因此

$$\frac{1}{1800} \le \int_0^{1/10} \frac{x}{(2+\cos x)^2} \,\mathrm{d}x \le \frac{1}{1797}.$$

$\sin x$ 更精確的界

對於 $0 \le y \le x \le \frac{1}{2}\pi$，我們有 $\cos y \ge 1 - \frac{1}{2}y^2$，即 $0 \le 1 - \cos y \le \frac{1}{2}y^2$（左邊的不等式成立是因為 $\cos y \le 1$）。由 0 積分到 x：

$$\int_0^x (1 - \cos y) \,\mathrm{d}y \le \int_0^x \tfrac{1}{2}y^2 \,\mathrm{d}y \quad \Longrightarrow \quad x - \sin x \le \tfrac{1}{6}x^3 \quad \Longrightarrow \quad \sin x \ge x - \tfrac{1}{6}x^3.$$

第二個積分

在 $[0, \frac{1}{10}]$ 上，我們有 $x - \frac{1}{6}x^3 \le \sin x \le x$，所以

$$1 - \tfrac{1}{6}x^3 \le 1 - x + \sin x \le 1.$$

想一想 為甚麼應該考慮這個組合？

分母中的 $-x$ 正是用來抵消 $\sin x$ 的首項，餘下 1 加上一個 x^3 階的量。下界 $1 - \frac{1}{6}x^3 \ge 1 - \frac{1}{6000}$ 是正數，所以和之前一樣，我們先平方，再取倒數（次序倒轉），然後乘以 $x^2 \ge 0$：

$$x^2 \le \frac{x^2}{(1 - x + \sin x)^2} \le \frac{x^2}{(1 - \frac{1}{6}x^3)^2}.$$

積分後，左邊給出 $\int_0^{1/10} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1000} = \frac{1}{3000}$。至於右邊，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 - \frac{1}{6}x^3)^{-1} = \frac{1}{2}x^2(1 - \frac{1}{6}x^3)^{-2}$，所以

$$\int_0^{1/10} \frac{x^2}{(1 - \frac{1}{6}x^3)^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^3}\right]_0^{1/10} = 2\left(\frac{6000}{5999} - 1\right) = \frac{2}{5999}.$$

因此

$$\frac{1}{3000} \le \int_0^{1/10} \frac{x^2}{(1 - x + \sin x)^2}\,\mathrm{d}x \le \frac{2}{5999}.$$

驗算

- 用辛普森法則（Simpson's rule）得 $\int_0^{1/10} x(2 + \cos x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 0.00055648$，介乎 $1/1800 \approx 0.00055556$ 與 $1/1797 \approx 0.00055648$ 之間（上界極為貼近：兩者相差僅約 5×10^{-10}）。
- 同樣地，$\int_0^{1/10} x^2(1 - x + \sin x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 0.000333389$，介乎 $1/3000 \approx 0.000333333$ 與 $2/5999 \approx 0.000333389$ 之間。
- 在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 內隨機抽取的 10^5 個點上，三個逐點不等式全部成立，並在 $x = 0$ 時取等號。

常見錯誤

- 沒有檢查正負號就取倒數：只有當 a 與 b 同號時，$a \le b$ 才能推出 $1/a \ge 1/b$。
- 忘記了比較積分的結果需要 f ≥ 0 才能得出左邊的不等式；這裏是由 $\sin y \ge 0$ 和 $1 - \cos y \ge 0$ 提供這個條件。

- 用 $\cos x \leq 1$ 這個界來求積分的上界：$\cos x \leq 1$ 令分母小於 9，得出的是下界 1/1800，而不是上界。

STEP 之外

反覆把 $0 \leq \cos y \leq 1$ 積分，可以得出一整串正負交錯的泰勒（Taylor）界 $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \leq \cdots$，這是證明 sin 和 cos 的泰勒級數（Taylor series）收斂（converge）於它們本身的其中一種方法。積分的單調性（monotonicity）以及被積函數的比較，都是實分析（real analysis）的基本工具，用來估計餘項、誤差和極限的界。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本實分析入門書）仔細地建立了積分理論和帶餘項的泰勒定理（Taylor's theorem）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。