詳細解答

STEP II 1991，第 5 題

純數學 • 積分歸約公式

> **STEP II 1991，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q5

關鍵思路

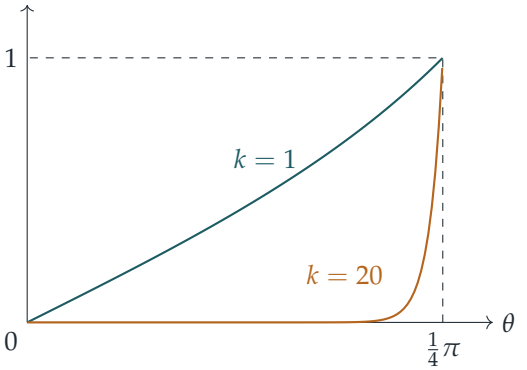
記 $I_k = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\,\mathrm{d}\theta$。tan 的奇數次冪和偶數次冪都不能直接積分，但把相隔兩次的兩個冪相加就可以：$\tan^k\theta + \tan^{k+2}\theta = \tan^k\theta\sec^2\theta$，而這正是 $\tan^{k+1}\theta/(k+1)$ 的導數（derivative）。由此得到的歸約公式（reduction formula），用歸納法（induction）逐層展開，便得出所求的公式；而 k 很大時的草圖告訴你積分會縮小至零，正是這一點把公式變成無窮級數（infinite series）的和。

解答

草圖

在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上，$0 \le \tan\theta \le 1$，且 $\tan 0 = 0$，$\tan\frac{1}{4}\pi = 1$。當 $k = 1$ 時，圖像由 $(0,0)$ 上升至 $(\frac{1}{4}\pi, 1)$，並稍微向上彎曲（起點的斜率為 1，終點的斜率為 $\sec^2\frac{1}{4}\pi = 2$）。

當 $k \gg 1$ 時，$\tan\theta$ 每一個小於 1 的值經過高次乘方後都被壓向 0，而兩端的值 0 和 1 則保持不變。因此 $\tan^k\theta$ 在區間的大部分範圍內都緊貼橫軸，到了非常接近 $\theta = \frac{1}{4}\pi$ 之處才急升至 1。事實上，設 $\theta = \frac{1}{4}\pi - u$，其中 u 很小，則 $\tan\theta \approx 1 - 2u$，所以 $\tan^k\theta \approx (1-2u)^k \approx \mathrm{e}^{-2ku}$：這個尖峯的寬度約為 $1/(2k)$，其下的面積約為 $1/(2k)$。



歸約公式

對 $k \geq 0$，

$$I_k + I_{k+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\,(1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \Big[\frac{\tan^{k+1}\theta}{k+1}\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{k+1}.$$

我們還需要兩個初始值：

$$I_0 = \tfrac{1}{4}\pi, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \Big[-\ln\cos\theta\Big]_0^{\pi/4} = -\ln\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

奇數次冪

設 $J_n = I_{2n+1}$。在歸約公式中取 $k = 2n-1$，得

$$J_n = \frac{1}{2n} - J_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

我們用歸納法證明所求的公式。當 $n = 1$ 時：$J_1 = \frac{1}{2} - J_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 = (-1)^1(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2})$，這正是 $n = 1$ 時的公式。

假設公式對 $n - 1 \geq 1$ 成立。則

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{2n} - (-1)^{n-1}\Big(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{2m}\Big) \\ &= (-1)^n\Big(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{2m}\Big) + (-1)^n\frac{(-1)^n}{2n} \\ &= (-1)^n\Big(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{2m}\Big), \end{aligned}$$

其中利用了 $(-1)^n(-1)^n = 1$，把 $\frac{1}{2n}$ 寫成括號內 $m = n$ 的一項。根據歸納法，公式對所有正整數 n 成立，證畢。

第一個級數

想一想 我們怎樣知道 $J_n \to 0$，而不只是「從草圖看來很小」？

我們需要一個確確實實的上界（bound）。在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上，$\tan\theta \geq 0$ 且 $\sec^2\theta \geq 1$，所以

$$0 \leq J_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+1}\theta \,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+1}\theta \sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2n+2}.$$

因此當 $n \to \infty$ 時 $J_n \to 0$，這正是 k 很大時的草圖所提示的（而且上界 $1/(2n+2)$ 與尖峯面積約為 $1/(2k)$ 相符）。由於 $|J_n|$ 就是公式中括號的絕對值，

$$\left|\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m}\right| = J_n \leq \frac{1}{2n+2} \to 0,$$

所以部分和（partial sum）$\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m}$ 收斂（converge）至 $-\frac{1}{2}\ln 2$。乘以 -1，得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

第二個級數

現在對偶數次冪照樣做一遍。設 $K_n = I_{2n}$。在歸約公式中取 $k = 2n-2$，得

$$K_n = \frac{1}{2n-1} - K_{n-1} \qquad (n \geq 1), \qquad K_0 = \tfrac{1}{4}\pi.$$

完全相同的歸納法（這次由 $K_1 = 1 - \frac{1}{4}\pi$ 開始）給出

$$K_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}\theta \,\mathrm{d}\theta = (-1)^n\left(\tfrac{1}{4}\pi + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m-1}\right):$$

歸納步驟是 $K_n = \frac{1}{2n-1} - (-1)^{n-1}(\cdots) = (-1)^n(\cdots) + (-1)^n\frac{(-1)^n}{2n-1}$，與之前一樣。同樣的上界給出

$$0 \leq K_n \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}\theta \sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2n+1} \to 0,$$

所以 $\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m-1} \to -\frac{1}{4}\pi$，即

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

驗算

- 取 $n = 1$：$\int_0^{\pi/4} \tan^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.15343$，而對該積分使用森遜法則（Simpson's rule）所得的結果，準確至小數點後十位都相同。我們用這個方法驗算了 $n = 1, \ldots, 11$ 時 I_{2n+1} 和 I_{2n} 的公式。

- 當 k 很大時，數值計算得 $I_{100} \approx 0.0049995$ 及 $I_{1000} \approx 0.00049999996$，非常接近 $1/(2k)$，與草圖的預測一致。
- 兩個級數各取一百萬項，得 $0.346573\ldots$ 和 $0.785398\ldots$，而 $\frac{1}{2}\ln 2 = 0.346574$，$\frac{1}{4}\pi = 0.785398$。誤差大約等於下一項的大小，與上面的上界所提示的一致。

常見錯誤

- 只說「$\tan^{2n+1}\theta \to 0$，所以積分趨向 0」而不給出上界。被積函數（integrand）在 $\theta = \frac{1}{4}\pi$ 處並不趨向 0，所以必須提出理由，例如利用 $\sec^2\theta \geq 1$ 所得的上界。
- 歸納過程中的正負號錯誤：把 $(-1)^n$ 留在括號外，並以直接計算核對 $n = 1$ 的情況。

STEP 之外

第一個級數是交錯調和級數（alternating harmonic series）$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$ 的一半，第二個則是 π 的萊布尼茲（Leibniz）級數。兩者都只是條件收斂（conditionally convergent）：重新排列各項可以改變級數的和，這個令人驚訝的事實（黎曼（Riemann）重排定理）在大學第一門分析課程的初段便會遇到。這裏的論證，即寫出一個精確的誤差項再把它夾逼至零，與帶餘項的泰勒（Taylor）定理是同一個想法。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對兩者都有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。