詳細解答

STEP II 1991，第 4 題

純數學 • 餘弦之和

> **STEP II 1991，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q4

本題在 *Beyond STEP* 第 6.2 節高斯的正十七邊形中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/gauss-17gon.html

關鍵思路

由於 $5\phi = 2\pi$ 及 $17\theta = 2\pi$，角的大倍數的餘弦會摺回小倍數的餘弦：當 $n\phi = 2\pi$ 時，$\cos(n-k)\phi = \cos k\phi$。因此，當我們用積化和差公式（product formulae）把餘弦之和平方或相乘時，所有項都會化回同樣的幾個餘弦。在後半部分，我們把八個餘弦 $\cos\theta, \ldots, \cos 8\theta$ 分成兩組，每組四個，求出它們的和與積，從而得到一個以 z 為根（root）的二次方程（quadratic）。

解答

五邊形：$\phi = 2\pi/5$

我們使用積化和差公式 $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$，以及 $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$。由於 $5\phi = 2\pi$，

$$\cos 3\phi = \cos(2\pi - 2\phi) = \cos 2\phi, \qquad \cos 4\phi = \cos(2\pi - \phi) = \cos\phi.$$

因此

$$\begin{aligned} y^2 &= \cos^2\phi + 2\cos\phi\cos 2\phi + \cos^2 2\phi \\ &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi) + (\cos 3\phi + \cos\phi) + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\phi) \\ &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi) + (\cos 2\phi + \cos\phi) + \tfrac{1}{2}(1+\cos\phi) \\ &= 1 + \tfrac{3}{2}(\cos\phi + \cos 2\phi) = 1 + \tfrac{3}{2}y. \end{aligned}$$

兩邊乘以 2，得 $2y^2 = 3y + 2$，正是所求。

此式可因式分解為 $(2y+1)(y-2) = 0$，所以 $y = -\frac{1}{2}$ 或 $y = 2$。但 $2\phi = \frac{4\pi}{5}$ 介乎 $\frac{\pi}{2}$ 與 π 之間，故 $\cos 2\phi < 0$，而 $\cos\phi \le 1$。於是 $y < 1$，這就排除了 $y = 2$，所以

$$y = \cos\tfrac{2\pi}{5} + \cos\tfrac{4\pi}{5} = -\tfrac{1}{2}.$$

$\theta = 2\pi/17$ 時各餘弦之和

設 $\omega = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$。根據棣美弗定理（de Moivre's theorem），$\omega^k = \cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta$，並且 $\omega^{17} = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1$，而 $\omega \ne 1$。把等比級數（geometric series）求和，

$$\sum_{k=0}^{16} \omega^k = \frac{\omega^{17} - 1}{\omega - 1} = 0.$$

取實部（real parts），得 $\displaystyle\sum_{k=0}^{16} \cos k\theta = 0$，正是所求。

z 的值

記 $c_k = \cos k\theta$。由於 $17\theta = 2\pi$，而且餘弦是偶函數（even function），

$$c_{17-k} = c_k \quad 及 \quad c_{-k} = c_k,$$

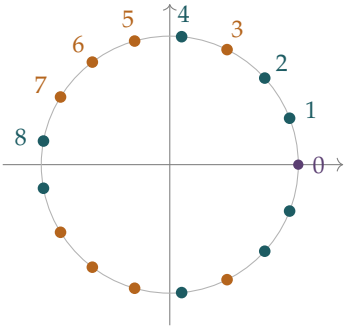
所以每個 c_k 都等於 $c_1, c_2, \ldots, c_8$ 其中之一。特別地，在剛證明的和式中除去 $c_0 = 1$ 後，就得到 $2(c_1 + c_2 + \cdots + c_8) = -1$，所以

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_8 = -\tfrac{1}{2}. \qquad (*)$$

z 中的角是 $1, 2, 4, 8$（每個都是前一個的兩倍，並按上述方法化簡：$16 \to 1$）。其餘四個 $3, 5, 6, 7$ 給出與之配對的和

$$w = c_3 + c_5 + c_6 + c_7.$$

下圖顯示單位圓（unit circle）上的十七個點 ω^k：藍綠色的點（及其鏡像）對應 z 中的餘弦，琥珀色的點則對應 w 中的餘弦。



和。 由 $(*)$，$z+w=c_1+c_2+\cdots+c_8=-\frac{1}{2}$。

積。 展開 zw 會得到十六個乘積 c_ac_b，其中 $a\in\{1,2,4,8\}$ 而 $b\in\{3,5,6,7\}$，每個乘積都等於 $\frac{1}{2}(c_{a+b}+c_{a-b})$。把每個下標化到 1 至 8 的範圍內（利用 $c_{-k}=c_k$ 及 $c_{17-k}=c_k$），所得的各對下標如下：

	$b=3$	$b=5$	$b=6$	$b=7$
$a=1$	4, 2	6, 4	7, 5	8, 6
$a=2$	5, 1	7, 3	8, 4	8, 5
$a=4$	7, 1	8, 1	7, 2	6, 3
$a=8$	6, 5	4, 3	3, 2	2, 1

（例如 $a=8$、$b=7$ 給出 c_{15} 和 c_1，而 $c_{15}=c_2$。）

想一想 我們需要知道出現的是哪些餘弦，還是只需知道各出現多少次？

只需知道次數。點算表中各項，下標 $1,2,\ldots,8$ 在 32 個項目中各自恰好出現四次。所以

$$zw=\tfrac{1}{2}\cdot 4\,(c_1+c_2+\cdots+c_8)=2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)=-1,$$

這裏再次用到 $(*)$。

二次方程。 由於 $z+w=-\frac{1}{2}$ 及 $zw=-1$，z 和 w 這兩個數是以下方程的根：

$$t^2+\tfrac{1}{2}t-1=0,\qquad \text{即}\qquad 2t^2+t-2=0,$$

所以 $\{z,w\}=\left\{\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4},\ \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}\right\}$。第一個根是正數，第二個是負數。

選取正確的根。 我們證明 $z>0$。由於 $\frac{4}{17}<\frac{1}{4}$，θ 和 2θ 都在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 內，所以 c_1 和 c_2 都大於 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，而 $c_1+c_2>\sqrt{2}>1$。此外 $4\theta=\frac{8\pi}{17}<\frac{\pi}{2}$，故 $c_4>0$，而且 $c_8\geq -1$。因此

$$z=(c_1+c_2)+c_4+c_8>1+0-1=0,$$

所以 z 必定是正根：

$$z=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}=-\frac{1-\sqrt{17}}{4}.$$

驗算

以數值計算，$\cos 72^\circ+\cos 144^\circ=0.30902-0.80902=-0.5$。取 $\theta=2\pi/17$，用計算機可得 $z=0.932472+0.739009+0.092268-0.982973=0.780776$，而 $(\sqrt{17}-1)/4=0.780776$；另外 $w=-1.280776=(-1-\sqrt{17})/4$，所以 $z+w=-0.5$ 及 $zw=-1$，與所得結果相符。

常見錯誤

- 在第一部分忘記排除 $y=2$，或在第二部分忘記排除 w 所對應的根：二次方程給出兩個可能的答案，必須另外用正負號的論證來選出其中一個。
- 在 $(*)$ 中把 $k=0$ 也算進去：整個和是 0，但 $c_0=1$，所以 $c_1+\cdots+c_{16}=-1$，除以二才得 $-\frac{1}{2}$。
- 在乘積表中化簡下標時出錯，例如把 c_9 當作新的一項，而不是 c_8。

STEP 之外

這就是高斯（Gauss）的著名計算，它證明了正 17 邊形可以用直尺和圓規作出。按 3 的冪（模 17 的一個生成元（generator））把各餘弦分成層層嵌套、大小依次為 8、4、2 和 1 的組，就得到一連串二次方程，所以 $\cos\frac{2\pi}{17}$ 可以只用平方根寫出；z 和 w 是這一連串方程的第一步，稱為高斯週期（Gaussian periods）。完整的故事屬於伽羅瓦理論（Galois theory）：參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）；至於單位根（roots of unity）的算術，可參閱 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算術）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。