詳細解答

STEP II 1991，第 3 題

純數學 • 對稱聯立方程

> **STEP II 1991，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q3

關鍵思路

三個相等的式子給出兩條方程，而未知數有三個，所以不能指望求出 x、y、z 本身。我們能做的，是利用當中的循環對稱（cyclic symmetry）。把式子兩兩相減，每個差 $x-y$ 都會變成下一個差 $y-z$ 的倍數；再把三個關係式相乘，幾乎所有東西都會約去。至於第二個結果，把共同值記作 k 並消去分母，便得到三個循環的線性關係式，它們以三種不同方式確定 xyz。

解答

證明 $x^2y^2z^2=1$

令首兩個式子相等，得

$$x-y=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{y-z}{yz}.$$

同樣地，令第二個與第三個相等，再令第三個與第一個相等，得

$$y-z=\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=\frac{z-x}{zx},\qquad z-x=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{x-y}{xy}.$$

把這三條等式相乘，得

$$(x-y)(y-z)(z-x)=\frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{x^2y^2z^2}.$$

由於 x、y 和 z 互不相等（distinct），乘積 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 不為零，所以可以把兩邊同時除以它。這樣便剩下 $1=1/(x^2y^2z^2)$，即

$$x^2y^2z^2=1,$$

這正是所要證明的。

> **想一想** 我們究竟在哪裏用到了 x、y、z 互不相等且非零這個條件？

非零是為了令分數 $1/x$、$1/y$、$1/z$ 有意義。互不相等則讓我們可以約去 $(x-y)(y-z)(z-x)$。沒有這個條件，結果便不成立：$x=y=z=2$ 滿足各方程，但 $x^2y^2z^2=64$。

共同值為 ± 1

設 k 為共同值（common value），則

$$x+\frac{1}{y}=k, \qquad y+\frac{1}{z}=k, \qquad z+\frac{1}{x}=k.$$

各式分別乘以 y、z 和 x（全部非零），得

$$xy=ky-1, \qquad yz=kz-1, \qquad zx=kx-1. \tag{$*$}$$

現在把其中第一式乘以 z，並用第二式代換 yz：

$$\begin{aligned} xyz &= k\,yz - z \\ &= k(kz-1)-z \\ &= (k^2-1)z-k. \end{aligned}$$

作代換 $x\to y\to z\to x$ 時，關係式 $(*)$ 保持不變，所以從第二式和第三式出發作同樣的計算，可得

$$xyz=(k^2-1)x-k, \qquad xyz=(k^2-1)y-k.$$

把 xyz 的首兩個表達式相減，得

$$(k^2-1)(z-x)=0.$$

由於 $z\neq x$，必有 $k^2=1$，所以 $x+\frac{1}{y}$ 的值不是 $+1$ 就是 -1，這正是所要證明的。

額外的收穫是：把 $k^2=1$ 代回去，可得 $xyz=-k$。這是得出第一個結果的另一條途徑，因為這樣便有 $x^2y^2z^2=k^2=1$。

驗算

兩個值都確實會出現。當 $k=1$ 時，從任意 $x\neq 0,1$ 出發，取 $y=\frac{1}{1-x}$ 及 $z=\frac{1}{1-y}=\frac{x-1}{x}$。於是 $z+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x}=1$，所以三個式子都等於 1。例如 $x=2$ 給出 $y=-1$，$z=\frac{1}{2}$：確實有 $2-1=-1+2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，而且 $xyz=-1=-k$。把 (x,y,z) 換成 $(-x,-y,-z)$，便得到 $k=-1$ 的解，例如 $(-2,1,-\frac{1}{2})$。在這裏三個數永遠互不相等，因為 $x=\frac{1}{1-x}$ 需要 $x^2-x+1=0$，而這條方程沒有實根。我們用精確分數檢驗了約 4000 組這樣的三元組，每次都確認 $x^2y^2z^2=1$ 和 $xyz=-k$。

常見錯誤

- 除以 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 時沒有說明它為何不為零。題目給出互不相等的條件，正是為此而設。
- 得出 $xyz = 1$ 而不是 $xyz = \pm 1$ 的結論：事實上 $xyz = -k$，所以當共同值為 1 時，$xyz = -1$。

STEP 之外

映射 $t \mapsto \dfrac{1}{k-t}$ 把 x 變成 y，把 y 變成 z，又把 z 變回 x。它是一個莫比烏斯變換（Möbius transformation），對應的矩陣（matrix）是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$，而這類映射的複合正好對應於它們的矩陣相乘。這道題其實是在問：這個映射何時有長度為 3 的循環（cycle）？答案 $k^2 = 1$ 正好就是該矩陣的立方為單位矩陣（identity）的倍數之時。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）有精彩的一章，講述莫比烏斯變換，以及如何按矩陣的跡（trace）把它們分類。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。