詳細解答

STEP II 1991，第 2 題

純數學 • 雙曲線的漸近線

> **STEP II 1991，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q2

關鍵思路

二次部分 $3y^2 - 10xy + 3x^2$ 可因式分解（factorise）為 $(3y - x)(y - 3x)$，而這就是整題的關鍵：只要把因式分解補全，將一次項也包括在內，曲線便成為「兩個一次式之積 $= 1$」。沿曲線走到極遠處時，其中一個因式必定趨向無限大，另一個因式便必定趨向零；令後者等於零，所得的直線就是一條漸近線（asymptote）。這正是提示所要求的「s 與 t 在極限時的關係」。

解答

切線

把 (†) 對 x 作隱函數微分（implicit differentiation），

$$6y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 10y - 10x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6x + 16\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 16 = 0,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{10y - 6x + 16}{6y - 10x + 16} = \frac{5y - 3x + 8}{3y - 5x + 8}.$$

在 (s, t) 處，斜率(gradient)為 $m = \dfrac{5t - 3s + 8}{3t - 5s + 8}$，而切線(tangent)為 $y = mx + (t - ms)$。把截距（intercept）通分，

$$t - ms = \frac{t(3t - 5s + 8) - s(5t - 3s + 8)}{3t - 5s + 8} = \frac{3t^2 - 10st + 3s^2 + 8t - 8s}{3t - 5s + 8}.$$

由於 (s,t) 在曲線上，$3t^2-10st+3s^2=-16t+16s-15$，所以分子為 $-8t+8s-15=-(8t-8s+15)$。因此切線為

$$y=\left(\frac{5t-3s+8}{3t-5s+8}\right)x-\left(\frac{8t-8s+15}{3t-5s+8}\right),$$

正如所求。（當 $3t-5s+8=0$ 時，切線是鉛垂的，此時應把公式理解為去分母後的形式。）

漸近線

嘗試把 (†) 寫成 $(3y-x+a)(y-3x+b)+k=0$。展開得

$$(3y-x+a)(y-3x+b)=3y^2-10xy+3x^2+(3b+a)y-(b+3a)x+ab,$$

所以我們需要 $3b+a=16$ 及 $b+3a=16$，由此得 $a=b=4$ 及 $ab=16$。因此 (†) 即是

$$(3y-x+4)(y-3x+4)=1.$$

對於點 (s,t)，設

$$u=3t-s+4,\qquad v=t-3s+4,\qquad \text{於是}\qquad uv=1.$$

切線方程中的每一個式子，都是 u、v 與常數的組合。比較 t 和 s 的係數，得

$$\begin{aligned}5t-3s+8&=\tfrac{1}{2}(3u+v),\\3t-5s+8&=\tfrac{1}{2}(u+3v),\\8t-8s+15&=2(u+v)-1=2(u+v)-uv,\end{aligned}$$

其中最後一式用了 $uv=1$。所以切線的斜率和截距為

$$m=\frac{3u+v}{u+3v},\qquad c=\frac{8t-8s+15}{3t-5s+8}=\frac{2(2u+2v-uv)}{u+3v}.$$

想一想 當 $s\to\infty$ 時，u 和 v 會怎樣？

消去 t，得 $u-3v=8s-8$，所以 $u-3v\to\infty$。由於 $uv=1>0$，u 和 v 同號。

- 若兩者皆為正數，$u-3v\to\infty$ 迫使 $u\to\infty$，於是 $v=1/u\to 0$。
- 若兩者皆為負數，$u-3v=3|v|-|u|\to\infty$ 迫使 $|v|\to\infty$，於是 $u=1/v\to 0$。

這就是提示所要的關係：在其中一支上 $t-3s+4\to 0$，在另一支上 $3t-s+4\to 0$。

情況 $v\to 0$，$u\to\infty$。把分子和分母同除以 u，

$$m=\frac{3+v/u}{1+3v/u}\to 3,\qquad c=\frac{2(2+2v/u-v)}{1+3v/u}\to 4,$$

所以切線的極限位置是 $y = 3x - 4$。

情況 $u \to 0$，$v \to \infty$。把分子和分母同除以 v，

$$m = \frac{3u/v + 1}{u/v + 3} \to \tfrac{1}{3}, \qquad c = \frac{2(2u/v + 2 - u)}{u/v + 3} \to \tfrac{4}{3},$$

所以切線的極限位置是 $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$，即 $3y = x - 4$。

因此兩條漸近線是 $y = 3x - 4$ 和 $3y = x - 4$。（若改為令 $s \to -\infty$，所得的仍是這兩條直線，只是兩個情況的角色互換。）留意這兩條正是直線 $v = 0$ 和 $u = 0$：從因式分解後的形式一眼便可看出。

夾角與軸

直線 $y = 3x - 4$ 的斜率為 3，所以它與 x 軸的夾角 θ 滿足 $\tan\theta = 3$。它與 y 軸的夾角便是 $\frac{\pi}{2} - \theta$，而 $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta = \frac{1}{3}$。直線 $3y = x - 4$ 的斜率為 $\frac{1}{3}$，所以它與 x 軸的夾角是 $\arctan\frac{1}{3}$，與第一條漸近線和 y 軸的夾角相同。

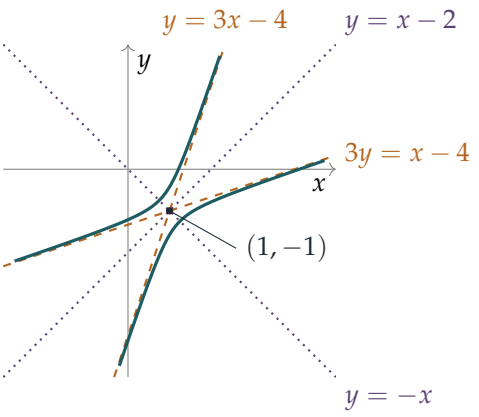
? **想一想** 為甚麼由此可知角平分線是甚麼？

對直線 $y = x$ 作反射（reflection），會把 x 軸和 y 軸互換；而根據剛才所證，它也會把兩條漸近線的方向互換：方向 $(1,3)$ 變成 $(3,1)$。因此兩條漸近線之間的夾角關於 $y = x$ 的方向對稱，亦即被這個方向平分：兩條漸近線的方向與 x 軸分別成 $\arctan 3$ 和 $\arctan\frac{1}{3}$，而這兩個角就是 $\frac{\pi}{4} \pm (\arctan 3 - \frac{\pi}{4})$。另一條角平分線（bisector）與第一條互相垂直。所以兩條角平分線的斜率是 1 和 -1。

雙曲線（hyperbola）的軸，就是通過其中心的兩條漸近線夾角平分線，而中心是兩條漸近線的交點。解 $y = 3x - 4$ 和 $3y = x - 4$：$9x - 12 = x - 4$，所以 $x = 1$，$y = -1$。中心是 $(1, -1)$，而兩條軸是

$$y + 1 = x - 1 \iff y = x - 2, \qquad y + 1 = -(x - 1) \iff y = -x.$$

要分辨哪條是哪條：在 $y = -x$ 上有 $u = v = 4 - 4x$，所以由 $uv = 1$ 得 $x = 1 \pm \frac{1}{4}$，頂點（vertices）是 $(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4})$ 和 $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$。所以 $y = -x$ 是貫軸（transverse axis）。在 $y = x - 2$ 上有 $u = 2x - 2 = -v$，所以 $uv = -(2x - 2)^2 \le 0$，這條直線（即共軛軸（conjugate axis））永不與曲線相交。



驗算

- 點 $(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4})$ 滿足 (†)：$3 \cdot \frac{25}{16} + 10 \cdot \frac{25}{16} + 3 \cdot \frac{25}{16} - 20 - 20 + 15 = 25 - 25 = 0$。
- 以數值檢驗：取 $u = 10^8$（即 $s \approx 1.25 \times 10^7$），切線公式給出斜率 3.0000000 和截距項 3.99999998；取 $u = -10^{-8}$ 則給出 0.33333333 和 1.33333334。
- 中心 $(1, -1)$ 給出 $u = v = 0$，所以它不在曲線上，這就是切線公式永不出現 $0/0$ 的原因。

常見錯誤

- 只從 $3k^2 - 10k + 3 = 0$（設 $t \approx ks$）求出斜率 3 和 $\frac{1}{3}$，卻忘記截距需要用到下一項：$t = 3s - 4 + o(1)$，而不僅是 $t \approx 3s$。
- 把角平分線取為通過原點，而不是通過中心 $(1, -1)$。

STEP 之外

每一條圓錐曲線（conic）$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ 都可寫成 $\mathbf{x}^{\mathsf{T}} A \mathbf{x} + \ldots$，其中 $A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ 是對稱矩陣（symmetric matrix），而曲線的軸沿着 A 的特徵向量（eigenvectors）的方向。這裏 $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ 的特徵向量是 $(1, 1)$ 和 $(1, -1)$，對應的特徵值（eigenvalues）-2 和 8 正負相反，曲線因而是雙曲線。像這樣把二次型（quadratic forms）對角化（diagonalising），是大學一年級線性代數（linear algebra）的核心課題；參看 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。