詳細解答

STEP II 1991，第 15 題

概率與統計 • 期望值的線性性質

> **STEP II 1991，第 15 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q15

關鍵思路

把數對 (n_1, n_2) 看成 $m \times m$ 方格表中的一格，全部 m^2 格出現的機會均等。滿足 $|n_1 - n_2| = k$ 的格子位於與主對角線平行的兩條對角線上，所以很容易數出來。之後的一切都來自期望值的線性性質（*linearity of expectation*）：若干個差之和的期望值，等於各個期望值之和，即使相鄰的項共用同一個變量、並非獨立（independent）亦然。監考員（invigilator）所走的路程也是同一類的和，只是第一段路由一張固定的書桌出發，而不是由隨機的一張出發。

解答

$|n_1 - n_2|$ 的分佈

由於 n_1 與 n_2 獨立，且各自在 $\{1, \ldots, m\}$ 上均勻分佈（uniform），m^2 個有序數對 (n_1, n_2) 中每一個的概率都是 $1/m^2$。

固定 k，其中 $1 \le k \le m-1$。滿足 $n_1 - n_2 = k$ 的數對是 $(k+1, 1), (k+2, 2), \ldots, (m, m-k)$，共 $m-k$ 對。由對稱性，滿足 $n_2 - n_1 = k$ 的數對另有 $m-k$ 對，而因為 $k \neq 0$，這兩組數對並不重疊。因此

$$\mathrm{P}(|n_1 - n_2| = k) = \frac{2(m-k)}{m^2},$$

正如所求。（當 $k = 0$ 時有 m 對，所以 $\mathrm{P}(|n_1 - n_2| = 0) = 1/m$。作為驗算，$\frac{1}{m} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2(m-k)}{m^2} = \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{m^2} = 1$。）

$|n_1 - n_2|$ 的期望值

$k = 0$ 這個值對期望值沒有貢獻，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|n_1 - n_2| &= \sum_{k=1}^{m-1} k \cdot \frac{2(m-k)}{m^2} = \frac{2}{m^2}\left(m\sum_{k=1}^{m-1} k - \sum_{k=1}^{m-1} k^2\right)\\ &= \frac{2}{m^2}\left(\frac{m\cdot m(m-1)}{2} - \frac{(m-1)m(2m-1)}{6}\right)\\ &= \frac{2}{m^2}\cdot\frac{m(m-1)(3m-(2m-1))}{6} = \frac{(m-1)(m+1)}{3m} = \frac{m^2-1}{3m},\end{aligned}$$

當中用了標準求和公式 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ 和 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，並取 $n = m-1$。

$m = 2$ 而有三個整數的情況

當 $m = 2$ 時，共有 $2^3 = 8$ 個機會均等的三元組 (n_1, n_2, n_3)。記 $S = |n_1 - n_2| + |n_2 - n_3|$：

(n_1, n_2, n_3)	111	112	121	122	211	212	221	222
S	0	1	2	1	1	2	1	0

總和是 8，所以 $\mathrm{E}(S) = 8/8 = 1$。題目所述的值是 $2(m^2-1)/(3m) = 2\cdot 3/6 = 1$，兩者吻合。

> ? **想一想** $|n_1 - n_2|$ 和 $|n_2 - n_3|$ 兩項都涉及 n_2。我們還可以直接把它們的期望值相加嗎？

可以。期望值的線性性質 $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ 完全不需要獨立性。每一對 (n_i, n_{i+1}) 單獨來看，都是兩個獨立而均勻分佈的整數，所以每一項的期望值都是 $(m^2-1)/(3m)$。一共有 $r-1$ 項，所以

$$\mathrm{E}(|n_1 - n_2| + |n_2 - n_3| + \cdots + |n_{r-1} - n_r|) = \frac{(r-1)(m^2-1)}{3m}.$$

$r = 3$ 的情況，就是我們剛才就 $m = 2$ 驗證過的結果。

監考員

把書桌沿直線依次編號為 $1, 2, \ldots, m$，於是書桌 i 與書桌 j 相距 $d|i-j|$。設 c_j 為第 j 次召喚所來自的書桌的編號，其中 $j = 1, \ldots, N+1$。我們把召喚者設定為互相獨立，且各自在 $\{1, \ldots, m\}$ 上均勻分佈。這就是我們對「m 名考生中任何一人召喚的機會均等」的理解。由於考生從不同時召喚，也不會在另一次召喚進行期間召喚，監考員會逐一處理各

次召喚，而當第 $j+1$ 次召喚出現時，監考員正站在書桌 c_j 旁。（若同一名考生連續召喚兩次，該段路的長度為 0，而公式已經涵蓋這種情況。）

因此所走的總距離是

$$D = d\,|c_1 - 1| + d\sum_{j=1}^{N} |c_{j+1} - c_j|.$$

*第一段路。*監考員由書桌 1 出發，而 c_1 是均勻分佈的，所以

$$\mathrm{E}|c_1 - 1| = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(i-1) = \frac{m-1}{2}.$$

留意這個值比 $(m^2-1)/(3m)$ 大。由這一列書桌的盡頭出發，令第一段路比平均的長。

*其餘 N 段路。*這裏 $c_1, \ldots, c_{N+1}$ 擔當 $n_1, \ldots, n_r$ 的角色，其中 $r = N+1$，所以由上面的結果可得

$$\mathrm{E}\sum_{j=1}^{N} |c_{j+1} - c_j| = \frac{N(m^2-1)}{3m}.$$

*合併。*再用一次線性性質，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(D) &= d\left(\frac{m-1}{2} + \frac{N(m-1)(m+1)}{3m}\right)\\ &= \frac{d(m-1)}{6m}(3m + 2N(m+1)) = \frac{d(m-1)}{6m}[2N(m+1) + 3m],\end{aligned}$$

這正是所求的結果。

驗算

- 當 $m = 1$ 時只有一張書桌，所以監考員從不走動。公式給出 0，理應如此。
- 當 $N = 0$ 時只有第一次召喚，公式化簡為 $d(m-1)\cdot 3m/(6m) = \frac{1}{2}d(m-1)$，即第一段路的期望值。
- 把召喚者的每一個可能序列逐一列舉，可確認公式對所有 $m \le 4$ 及 $N \le 3$ 都成立。以 $m = 10$、$N = 20$、$d = 1$ 進行 2×10^5 次模擬，所得平均值為 70.50，而公式給出的是 $\frac{9}{60}(440 + 30) = 70.5$。

常見錯誤

- 把第一段路當作與其餘各段一樣處理。監考員由書桌 1 出發，而不是由隨機的一張書桌出發，所以該段路的期望值是 $\frac{1}{2}(m-1)$，而不是 $(m^2-1)/(3m)$。

- 只數 $n_1 - n_2 = k$ 的情況，忘記了因 $n_2 - n_1 = k$ 而來的因子 2；或者錯誤地把 $k = 0$ 的情況也乘以二。
- 以為和式中各項必須互相獨立，它們的期望值才可以相加。

STEP 之外

監考員的位置是一條馬可夫鏈（*Markov chain*）：他們下一步往哪裏去，只取決於他們現在身在何處。這裏的鏈非常簡單，每一步都把過去完全「忘記」。在較複雜的模型中（例如召喚較可能來自附近的書桌），我們便需要這條鏈的平穩分佈（stationary distribution），才能求出長遠而言每次召喚平均所走的路程。第一個結果的連續版本是：在 $[0,1]$ 上兩個獨立而均勻分佈的點，平均相距 $\frac{1}{3}$，這正是 $(m^2-1)/(3m)$ 除以 m 後的極限。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）涵蓋了期望值的線性性質和馬可夫鏈。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。