詳細解答

STEP II 1991，第 14 題

力學 • 相對速度與追蹤

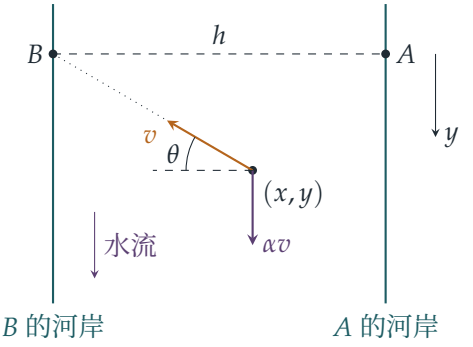
> **STEP II 1991，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q14

關鍵思路

船相對於地面的速度，等於船相對於水的速度加上水流的速度。「船頭始終指向 B」是一個幾何條件，即 $y = x\tan\theta$；對它求導，便得到同一個速度的第二個表達式。把兩個表達式對照，就得出一條連繫 x 與 θ 的可分離變數（separable）方程。選用代換 $\tan\theta = \sinh(\alpha s)$，是因為它令 $\sec\theta + \tan\theta$ 變成一個指數函數，於是所有式子都化為 s 的簡單指數函數。

解答

我們把船當作質點（particle）來建立模型。取 B 為原點，x 由 B 所在的河岸量向 A，y 則沿下游方向量度，因此 A 位於 $(h, 0)$，而船由該處出發。



以 θ 表示速度

船頭指向 B 所在的河岸，與方向 AB 成 θ 角，並偏向上游（以抵消水流造成的漂移）。因此，以我們的 (x,y) 分量表示，船相對於水的速度（relative velocity）是沿單位向量 $-(\cos\theta,\sin\theta)$ 的 v。再加上水流，即 y 方向上的 αv，便得

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-v\cos\theta\\ \alpha v-v\sin\theta\end{pmatrix}.$$

指向 B

由位於 (x,y) 的船到 B 的方向是沿 $(-x,-y)$，而這個方向與 AB 成 θ 角，當且僅當 $\tan\theta=y/x$。所以在整個運動過程中，

$$y=x\tan\theta.$$

利用積法則（product rule）和鏈式法則（chain rule）對 t 求導，

$$\dot{y}=\tan\theta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x\sec^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

所以速度向量 $(\dot{x},\dot{y})$ 具有題目要求的形式。

x 與 θ 的微分方程

現在把兩個表達式對照。由 x 分量得 $\dot{x}=-v\cos\theta$。把它代入 y 分量，

$$\begin{aligned}\tan\theta\,(-v\cos\theta)+x\sec^2\theta\,\dot{\theta}&=\alpha v-v\sin\theta\\ x\sec^2\theta\,\dot{\theta}&=\alpha v,\end{aligned}\tag{$*$}$$

這是因為 $\tan\theta\cos\theta=\sin\theta$，兩邊的 $-v\sin\theta$ 項互相抵消。特別地，$\dot{\theta}>0$，所以 θ 由 0 起不斷增加，我們可以把 x 看成 θ 的函數。兩式相除，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\dot{x}}{\dot{\theta}}=\frac{-v\cos\theta\cdot x\sec^2\theta}{\alpha v}=-\frac{x\sec\theta}{\alpha},\qquad\text{所以}\qquad\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-x\sec\theta,$$

正是所求。

求解 x

這條方程可以分離變數（船到達之前 $x>0$）：

$$\alpha\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta\quad\Longrightarrow\quad\alpha\ln x=-\ln(\sec\theta+\tan\theta)+C,$$

這裏用了標準積分 $\int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta=\ln(\sec\theta+\tan\theta)$，它在 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 時成立。開始時船在 A，該處 $x=h$ 而 $\theta=0$，所以 $C=\alpha\ln h$。因此

$$\alpha\ln\frac{x}{h}=-\ln(\sec\theta+\tan\theta),\qquad\text{即}\qquad\left(\frac{x}{h}\right)^{\alpha}=(\sec\theta+\tan\theta)^{-1}.$$

代換 $\tan\theta = \sinh(\alpha s)$

> **想一想** 以 s 表示，$\sec\theta$ 是甚麼？

由於 $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta = 1+\sinh^2(\alpha s) = \cosh^2(\alpha s)$，而 $\sec\theta$ 和 $\cosh(\alpha s)$ 都是正數（因為 $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$），我們得到 $\sec\theta = \cosh(\alpha s)$。於是

$$\sec\theta + \tan\theta = \cosh(\alpha s) + \sinh(\alpha s) = \mathrm{e}^{\alpha s},$$

所以 $(x/h)^\alpha = \mathrm{e}^{-\alpha s}$，兩邊取 α 次方根，得 $x = h\mathrm{e}^{-s}$。

至於變率的方程，把 $\tan\theta = \sinh(\alpha s)$ 對 t 求導：

$$\sec^2\theta\,\dot\theta = \alpha\cosh(\alpha s)\,\dot s.$$

把這個結果和 $x = h\mathrm{e}^{-s}$ 代入 $(*)$，得 $h\mathrm{e}^{-s}\cdot\alpha\cosh(\alpha s)\,\dot s = \alpha v$，再除以 α，

$$h\mathrm{e}^{-s}\cosh(\alpha s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v,$$

正是所求。

渡河所需的時間

在 A 處，$\theta = 0$，所以 $s = 0$。由於 $\dot s > 0$，s 不斷增加，而當 $x = h\mathrm{e}^{-s} \to 0$，即 $s \to \infty$ 時，船到達 B。（船確實會到達 B：因為 $\alpha < 1$，所以 $y = x\tan\theta = h\mathrm{e}^{-s}\sinh(\alpha s) \to 0$。）分離變數後，渡河時間為

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{v}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}\cosh(\alpha s)\,\mathrm{d}s = \frac{h}{2v}\int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-(1-\alpha)s} + \mathrm{e}^{-(1+\alpha)s}\right)\mathrm{d}s \\ &= \frac{h}{2v}\left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1+\alpha}\right) = \frac{h}{2v}\cdot\frac{2}{1-\alpha^2} = \frac{h}{v(1-\alpha^2)}, \end{aligned}$$

其中兩個積分都收斂（converge），因為 $1-\alpha > 0$。所以渡河所需的時間是 $hv^{-1}(1-\alpha^2)^{-1}$。

驗算

- 沒有水流時（$\alpha = 0$），船筆直駛過對岸，$T = h/v$，與預期相符。當 $\alpha \to 1$ 時，所需時間趨向無限大：船若不比水流快，在 B 附近船頭正對上游時，便永遠無法逆流前進。
- 我們以數值方法逐步計算這個運動（四階龍格—庫塔法（Runge–Kutta），每一步都把船頭對準 B）。取 $h = v = 1$ 和 $\alpha = \frac{1}{2}$，船在 $t \approx 1.33333$ 時到達，與 $1/(1-\frac{1}{4}) = \frac{4}{3}$ 吻合。沿着整條路徑，$(x/h)^\alpha(\sec\theta+\tan\theta)$ 一直等於 1，誤差約為 10^{-13}。

常見錯誤

- 弄錯船頭方向的 y 分量的正負號。船會被沖向下游，所以指向 B 就是要部分指向上游；當 $\theta > 0$ 時，這個分量是 $-v\sin\theta$。
- 忘記說明為何 $\sec\theta = +\cosh(\alpha s)$：這需要 θ 一直小於 $\frac{\pi}{2}$，而這是成立的，因為 θ 是由 B 到一個 $x > 0$ 的點的直線所成的角。

STEP 之外

這是一道經典的追逐曲線（pursuit curve）問題：一個物體不斷把方向對準目標，而它的路徑可由一條關於運動方向的微分方程求得。同樣的想法可以描述狗追趕正在走動的主人，或者導彈追蹤目標，並且自然地引出曳物線（tractrix）一類的曲線。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）很適合用來熟習相對速度，以及在運動參考系（moving frames）中建立運動方程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。