詳細解答

STEP II 1991，第 13 題

力學 • 剛體轉動

STEP II 1991，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/91-s2-q13

關鍵思路

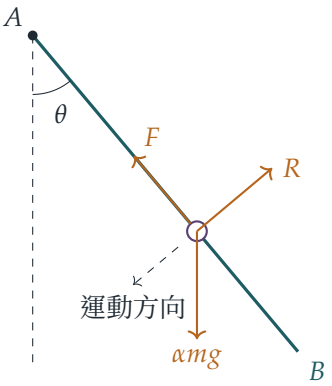
在小環滑動之前，桿和小環如同單一剛體（rigid body）一起繞 A 轉動。因此我們可以求出這個組合體的角速率（angular speed，由能量求得）和角加速度（angular acceleration，由力矩（moments）求得），然後用它們算出桿必須對小環施加甚麼力，才能令小環繼續隨桿運動。只有當小環所需的摩擦力（friction）不超過法向反作用力（normal reaction）的 μ 倍時，小環才會留在原位；這個條件首次不成立的角度，就是開始滑動的角度。

解答

模型

我們把小環視為與 A 相距 x 的質點，把支點視為光滑，並把桿視為剛體。設 θ 為桿與向下鉛垂線之間的夾角，所以釋放時 $\theta = \frac{\pi}{2}$，而桿向下擺動時 θ 遞減。以 $\omega = |\dot{\theta}|$ 表示角速率，以 $\beta = |\ddot{\theta}|$ 表示角加速度的大小。

桿對小環施加兩個力：一個是垂直於桿的法向反作用力 R，以小環運動的方向為正；另一個是沿桿的摩擦力 F，以指向 A 的方向為正。由於小環是套在桿上的，R 的正負號兩種情況都有可能出現。



圖中把 R 畫成與運動方向相反，因為當 $k^2 > xd$ 時結果正是如此，但在代數運算中我們保留一般的正負號。

剛體的運動

小環固定在桿上時，整體繞 A 的轉動慣量（moment of inertia）為 $mk^2 + \alpha m x^2 = m(k^2 + \alpha x^2)$。自釋放起，桿的質心（centre of mass）下降了 $d\cos\theta$，小環下降了 $x\cos\theta$，所以由能量守恆（conservation of energy）可得

$$\tfrac{1}{2}m(k^2 + \alpha x^2)\,\omega^2 = mg(d + \alpha x)\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{2g(d + \alpha x)\cos\theta}{k^2 + \alpha x^2}.$$

對 A 取力矩（支點的力沒有力矩），兩個重量的總力矩為 $mg(d + \alpha x)\sin\theta$，所以

$$\beta = \frac{g(d + \alpha x)\sin\theta}{k^2 + \alpha x^2}.$$

小環所受的力

小環沿半徑為 x 的圓運動。它的加速度有兩個分量：沿桿指向 A 的 $x\omega^2$，以及垂直於桿、沿運動方向的 $x\beta$。沿桿向外的方向與向下鉛垂線的夾角為 θ，所以重量沿桿向外的分量為 $\alpha mg\cos\theta$，沿運動方向的分量為 $\alpha mg\sin\theta$。

沿桿、指向 A 的方向：$F - \alpha mg\cos\theta = \alpha m x\omega^2$，所以

$$\begin{aligned} F &= \alpha mg\cos\theta\left(1 + \frac{2x(d + \alpha x)}{k^2 + \alpha x^2}\right) \\ &= \frac{\alpha mg\cos\theta\,(k^2 + 3\alpha x^2 + 2xd)}{k^2 + \alpha x^2}. \end{aligned}$$

垂直於桿、沿運動方向：

$$R + \alpha mg\sin\theta = \alpha m x\beta \quad\Longrightarrow\quad R = \alpha mg\sin\theta\left(\frac{x(d + \alpha x)}{k^2 + \alpha x^2} - 1\right) = \frac{\alpha mg\sin\theta\,(xd - k^2)}{k^2 + \alpha x^2}.$$

留意 αx^2 的項在 R 中互相抵消，這就是為甚麼只出現 $k^2 - xd$。

想一想 小環傾向朝哪個方向滑動？R 的正負號又代表甚麼？

當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 時，我們有 $F > 0$：桿必須把小環拉向 A，所以若摩擦力不足，小環便會向外滑，即滑向 B。若 $k^2 > xd$，則 $R < 0$，即桿正在拖住小環。若只有小環自己，它會比桿上這一點下落得更快，所以桿要頂住它。

何時開始滑動？

只要 $|F| \le \mu|R|$，小環便會固定在桿上。當 $k^2 > xd$ 時，F 和 $|R|$ 都含有同一個正因子 $\alpha mg/(k^2 + \alpha x^2)$，所以條件是

$$\cos\theta\,(k^2 + 3\alpha x^2 + 2xd) \le \mu \sin\theta\,(k^2 - xd), \quad \text{即} \quad \mu\tan\theta \ge \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{k^2 - xd}.$$

釋放時，$\theta = \frac{\pi}{2}$ 而 $F = 0$，所以小環不會立即滑動。當 θ 由 $\frac{\pi}{2}$ 遞減至 0 時，$\mu\tan\theta$ 由 $+\infty$ 平穩地遞減至 0，而右邊是一個固定的正數。所以不等式首次不成立、小環開始向外滑動的時刻，就是在滿足下式的唯一角度：

$$\boxed{\mu\tan\theta = \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{k^2 - xd}}$$

這正是所要求的結果。小環必定在桿到達鉛垂位置之前滑動。

第 (i) 部分：$k^2 = xd$

現在在任何角度都有 $R = 0$，所以可提供的最大摩擦力 $\mu|R|$ 為零。但只要 $\theta < \frac{\pi}{2}$，便有 $F > 0$。所以不論 μ 的值是多少，桿一釋放，小環便開始沿桿向外滑動。從物理上看，釋放時桿上與 A 相距 $x = k^2/d$ 的那一點，開始下落時的加速度恰好是 g（因為在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時 $x\beta = g$）。所以小環對桿的兩側都沒有壓力，摩擦力也就無從產生。

第 (ii) 部分：$k^2 < xd$

現在 $R > 0$：桿沿運動方向推動小環，因為桿上這一點在釋放時下落的加速度會大於 g。小環同樣傾向向外滑動，而條件 $F \le \mu R$ 變成

$$\mu\tan\theta \ge \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{xd - k^2}.$$

按照與之前相同的論證，小環起初保持不動，並在以下情況開始向外滑動：

$$\mu\tan\theta = \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{xd - k^2},$$

這就是把題目所給結果中的 $k^2 - xd$ 換成 $|k^2 - xd|$。唯一的分別是法向反作用力現在作用在小環的另一側。

驗算

- 當 $k^2 > xd$ 時，隨着 $\mu \to \infty$，滑動角度 $\theta \to 0$：非常粗糙的桿幾乎可以把小環一直留住到最低點。當 $k^2 - xd \to 0$ 時，該角度趨向 $\frac{\pi}{2}$，與第 (i) 部分吻合。
- 長度為 $2a$ 的均勻桿有 $d = a$ 及 $k^2 = \frac{4}{3}a^2$，所以臨界位置 $x = k^2/d = \frac{4}{3}a$ 就是撞擊中心（centre of percussion），即桿釋放時以自由落體方式開始運動的那一點。
- 在數值方面，我們對剛體運動進行積分，用有限差分算出小環的加速度，並就隨機選取的參數值重新求得 F 和 R，誤差在 10^{-5} 之內。例如，當 $k^2 - xd \approx 2.87$ 時，小環首次需要多於 $\mu|R|$ 的摩擦力是在 $\theta \approx 1.3270$，與公式一致。$k^2 < xd$ 的情況亦以同樣方式與 (ii) 的公式吻合。

常見錯誤

- 忘記小環本身對轉動慣量和對重量力矩的貢獻。在滑動之前，小環是剛體的一部分。
- 使用摩擦定律時，以重量的法向分量代替實際的法向反作用力 R，而這裏的法向反作用力還取決於角加速度。
- 在沿桿方向的方程中漏掉向心（centripetal）項 $x\omega^2$，而 $3\alpha x^2$ 中的因子 3 正是由此而來。

STEP 之外

與支點相距 k^2/d 的那一點就是撞擊中心。在該處擊打，支點不會產生衝擊反作用力，這就是板球棒或網球拍有「甜點」的原因。它同時也是與該複擺（compound pendulum）週期相同的單擺的長度。這裏所用的方法，是先求出剛體的運動，再問需要甚麼內力來維持這種運動，這正是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）中分析約束力（constraint forces）的基礎。想進一步了解剛體轉動和複擺，可閱讀 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。