詳細解答

STEP II 1991，第 12 題

力學 • 受迫彈性振動

> **STEP II 1991，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q12

本題在 *Beyond STEP* 第 11.1 節共振中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/resonance.html

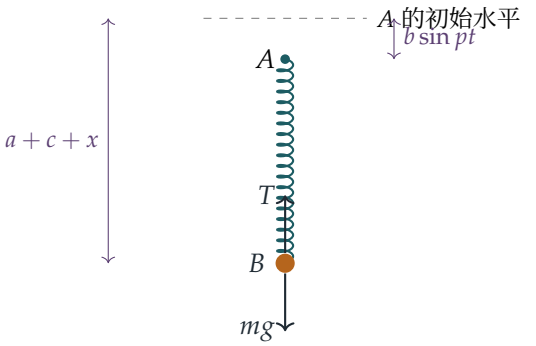
關鍵思路

張力只取決於伸長量（extension），即質點的位置減去移動端的位置，再減去自然長度（natural length）。把它用 x 和 $b\sin pt$ 表示出來，再利用初始平衡狀態把彈性模量（modulus）換成含 c 的式子，運動方程（equation of motion）便自然得出。接下來要處理的是一個受迫簡諧振子（forced simple harmonic oscillator）。求解時把特解（particular solution）加到餘函數（complementary function）上，並謹記「拉緊」的意思是「伸長量永不為負」。

解答

運動方程

把質點視為質量為 m 的一點，繫於一條遵從胡克定律（Hooke's law）、彈性模量為 λ 的輕彈性繩上。所有位置均由 A 的初始位置起向下量度。



在初始平衡狀態下，伸長量為 c，而張力與重量平衡：

$$\frac{\lambda c}{a} = mg, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\lambda}{ma} = \frac{g}{c} = n^2.$$

在時間 t，質點位於深度 $a + c + x$，而端點 A 位於深度 $b\sin pt$。只要繩子拉緊，其長度為 $a + c + x - b\sin pt$，所以伸長量為

$$e = c + x - b\sin pt,$$

而張力為 $T = \lambda e/a$。對質點沿向下方向分解力，

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= mg - \frac{\lambda}{a}(c + x - b\sin pt) \\ &= mg - \frac{\lambda c}{a} - \frac{\lambda}{a}(x - b\sin pt) \\ &= -\frac{\lambda}{a}(x - b\sin pt), \end{aligned}$$

其中用了 $\lambda c/a = mg$。兩邊除以 m，並利用 $\lambda/(ma) = n^2$，得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -n^2(x - b\sin pt),$$

正是所求。這裏需要 $e \geq 0$：假如繩子鬆弛，張力便會是零，而不是 $\lambda e/a$。

求解 $x(t)$

把方程改寫成 $\ddot{x} + n^2x = n^2b\sin pt$。餘函數是 $C\cos nt + D\sin nt$。至於特積分（particular integral），試用 $x = K\sin pt$：

$$-p^2K + n^2K = n^2b \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{n^2b}{n^2 - p^2},$$

這是成立的，因為 $p < n$ 保證 $n^2 - p^2 \neq 0$。所以

$$x = \frac{n^2b}{n^2 - p^2}\sin pt + C\cos nt + D\sin nt.$$

在 $t = 0$ 時，質點位於平衡位置且處於靜止，所以 $x(0) = 0$ 及 $\dot{x}(0) = 0$。由前者得 $C = 0$。由後者得

$$\frac{n^2bp}{n^2 - p^2} + nD = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = -\frac{nbp}{n^2 - p^2}.$$

因此

$$x(t) = \frac{bn}{n^2 - p^2}(n \sin pt - p \sin nt),$$

正是所求。

繩子何時保持拉緊

想一想 究竟是甚麼必須保持為正：是 x、張力，還是別的東西？

是伸長量 $e = c + x - b \sin pt$。$x(t)$ 的公式只在 $e \geq 0$ 時才描述這個運動，所以繩子自始至終保持拉緊，當且僅當這個不等式對所有 $t \geq 0$ 都成立。代入 x，

$$\begin{aligned} x - b \sin pt &= b \sin pt \left(\frac{n^2}{n^2 - p^2} - 1 \right) - \frac{bnp}{n^2 - p^2} \sin nt \\ &= \frac{bp}{n^2 - p^2}(p \sin pt - n \sin nt). \end{aligned}$$

所以充分必要條件（necessary and sufficient condition）是

$$c + \frac{bp}{n^2 - p^2}(p \sin pt - n \sin nt) \geq 0 \quad \text{對所有} t \geq 0,$$

又因為 $n^2 - p^2 > 0$，這等價於

$$bp(n \sin nt - p \sin pt) \leq c(n^2 - p^2) \quad \text{對所有} t \geq 0.$$

（如果 e 只在個別孤立的時刻觸及 0，張力在那一瞬間為零，但運動方程仍然成立，繩子亦從未真正鬆弛。這就是不等式不必嚴格的原因。）

現在假設 $pb < (n - p)c$。對任何 t，由於 $\sin nt \leq 1$ 和 $-\sin pt \leq 1$，且 $n, p > 0$，

$$n \sin nt - p \sin pt \leq n + p.$$

取 $b > 0$（即振幅），便有 $bp > 0$，所以

$$bp(n \sin nt - p \sin pt) \leq bp(n + p) < (n - p)c(n + p) = c(n^2 - p^2).$$

條件成立，而且其實是嚴格不等式，所以繩子自始至終保持拉緊。（假如容許 b 為負，只要以 $|b|$ 代替 b，同樣的論證仍然適用，因為 $|n \sin nt - p \sin pt| \leq n + p$。）

驗算

- 取 $t=0$：$x(0)=0$ 及 $\dot{x}(0)=\frac{bn}{n^2-p^2}(np-pn)=0$，與應有的結果相符。
- 當 $p\to 0$ 時，端點 A 幾乎不動，而 $x(t)\approx\frac{bn}{n^2}(npt-pnt)\to 0$。一如所料，甚麼也沒有發生。
- 最小伸長量不可能低於 $c-bp(n+p)/(n^2-p^2)=c-bp/(n-p)$，而此值為正，恰好當 $pb<(n-p)c$。
- 數值上，以隨機選取的 m,λ,a,c,b,p 對完整的胡克定律方程作逐步（RK4）積分，結果與 $x(t)$ 的公式相符，誤差在 4×10^{-10} 之內。取 $n=1$、$p=1/\sqrt{2}$、$c=1$，而 b 只比 $(n-p)c/p$ 高出 5%，則到 $t=20\,000$ 之前，伸長量確實會變成負數（約為 -0.05）。

常見錯誤

- 把 x 本身當作伸長量。上端是會移動的，所以伸長量是 $c+x-b\sin pt$。
- 忘記了 $\dot{x}(0)=0$ 會令解中必須出現 $\sin nt$ 項。沒有這一項，質點起初的速度便會是 $n^2bp/(n^2-p^2)$。
- 把拉緊的條件寫成 $x\geq -c$。只有當 A 固定不動時，這才是對的。

STEP 之外

這是一個無阻尼的受迫振子。它的響應由驅動頻率（driving frequency）p 和固有頻率（natural frequency）n 混合而成，而因子 $1/(n^2-p^2)$ 在 $p\to n$ 時趨向無窮大，這就是共振（resonance）。當 n/p 是無理數時，(nt,pt) 模 2π 的值會稠密地填滿整個範圍，所以 $n\sin nt-p\sin pt$ 可以任意接近 $n+p$。於是充分條件 $pb<(n-p)c$ 基本上也是必要條件（等號仍然容許）。關於受迫振動、共振和阻尼（damping），Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）有詳盡的論述；微分方程方面，則可參看 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。