詳細解答

STEP II 1991，第 11 題

力學 • 拋體與發射點的距離

STEP II 1991，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/91-s2-q11

關鍵思路

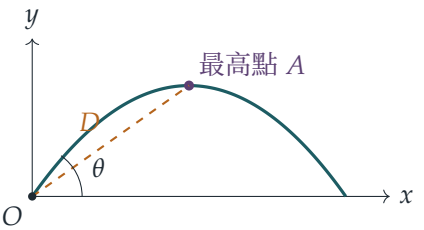
處理砲彈與大砲之間距離的平方：這樣可以避開平方根，並把兩部分都化為多項式（polynomial）問題。在第一部分，最高點距離的平方是 $\sin^2\theta$ 的二次式，所以用配方法（completing the square）（或求導）便可找出最佳角度。在第二部分，砲彈逐漸接近，當且僅當距離的平方正在遞減，因此我們要考察它對時間的導數（derivative）在整個飛行過程中的正負。

解答

模型

我們把砲彈視為只受重力作用而自由運動的質點（particle），不計空氣阻力，從原點 O（砲手所站之處）以速率 u、仰角（angle of elevation）θ 發射，其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。取 x 為水平方向，y 為鉛垂向上。在時間 t，

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$



仰角

當 $\dot{y} = u\sin\theta - gt = 0$，即 $t = u\sin\theta/g$ 時，砲彈到達最高點（apex）。此時

$$x_A = \frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g}, \qquad y_A = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

以 D 表示距離 OA，並設 $s = \sin^2\theta$，於是 $\cos^2\theta = 1 - s$。那麼

$$\begin{aligned} D^2 = x_A^2 + y_A^2 &= \frac{u^4}{g^2}\left(\sin^2\theta\cos^2\theta + \tfrac{1}{4}\sin^4\theta\right) \\ &= \frac{u^4}{g^2}\left(s(1-s) + \tfrac{1}{4}s^2\right) = \frac{u^4}{g^2}\left(s - \tfrac{3}{4}s^2\right). \end{aligned}$$

由於損害隨距離增加而減少，砲手希望 D 愈大愈好，這等同於令 D^2 愈大愈好。配方得

$$s - \tfrac{3}{4}s^2 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4}\left(s - \tfrac{2}{3}\right)^2,$$

它恰好在 $s = \frac{2}{3}$ 時取得最大值 $\frac{1}{3}$。這個值是可以取到的，因為 $s = \sin^2\theta$ 可取 $(0,1)$ 內的每一個值。所以 $\sin^2\theta = \frac{2}{3}$，$\cos^2\theta = \frac{1}{3}$，從而

$$\boxed{\tan\theta = \sqrt{2}, \qquad \theta = \arctan\sqrt{2} \approx 54.7^\circ}$$

此時最高點與大砲的距離為 $D = \dfrac{u^2}{\sqrt{3}\,g}$。

砲彈在下降期間會否更接近砲手？

設 $r^2 = x^2 + y^2$ 為時間 t 時砲彈與大砲距離的平方。砲彈逐漸接近，當且僅當 r^2 正在遞減，所以我們需要知道

$$\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = x\dot{x} + y\dot{y}.$$

的正負。

? **想一想** 為甚麼不直接把最高點的距離與之後幾個點的距離比較一下？

只看幾個點，並不能排除距離在它們之間曾經下跌的可能。導數卻能一次過告訴我們飛行中每一刻的情況。由 $\dot{x} = u\cos\theta$ 及 $\dot{y} = u\sin\theta - gt$，

$$\begin{aligned} x\dot{x} + y\dot{y} &= u^2 t\cos^2\theta + \left(ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(u\sin\theta - gt) \\ &= u^2 t - \tfrac{3}{2}ugt^2\sin\theta + \tfrac{1}{2}g^2t^3 \\ &= \tfrac{1}{2}t\left[(gt)^2 - 3u\sin\theta\,(gt) + 2u^2\right], \end{aligned}$$

其中用到 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$。當 $t > 0$ 時，其正負與方括號內的式子相同，而該式是 gt 的二次式。配方得

$$(gt)^2 - 3u\sin\theta\,(gt) + 2u^2 = \left(gt - \tfrac{3}{2}u\sin\theta\right)^2 + u^2\left(2 - \tfrac{9}{4}\sin^2\theta\right).$$

在所選的角度下 $\sin^2\theta = \frac{2}{3}$，所以常數項為 $u^2\left(2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}u^2 > 0$。因此方括號內的式子對每個 t 都嚴格為正，故 r^2 在整個飛行過程中嚴格遞增（strictly increasing）。

所以答案是**不會**：砲彈在整個下降過程中一直遠離砲手，而下降路徑上最接近的一點就是最高點本身。這說明砲手只考慮砲彈在最大高度爆炸的捷徑是合理的：對這個角度而言，最高點確實是下降路徑上最接近的一點，距離為 $u^2/(\sqrt{3}\,g)$。

驗算

- 當 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時，最高點位於 $(u^2/2g,\, u^2/4g)$，所以 $D^2 = \frac{5}{16}u^4/g^2$，比我們的最大值 $\frac{1}{3}u^4/g^2$ 略小，正如所料。
- 一般情況的計算顯示，只有當 $\frac{9}{4}\sin^2\theta \geq 2$，即 $\sin\theta \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 時，砲彈才開始會有接近的情況，對應的角度約為 70.5°，遠高於 54.7°。（極限 $\theta \to \frac{\pi}{2}$ 的情況合乎常理：垂直向上發射的砲彈會筆直地朝大砲落回來。）
- 數值上，取 $u = g = 1$，對 θ 搜尋，可得最高點距離的最大值 $0.57735 \approx 1/\sqrt{3}$，出現在 $\theta \approx 54.736°$；在該角度下沿軌跡（trajectory）逐步計算，可見與 O 的距離從不減少；而在 $70.5° \pm 0.6°$ 之間，距離由單調（monotonic）變為不單調。

常見錯誤

- 把最高點的水平距離或高度最大化，而不是把它與大砲的直線距離最大化。
- 以為砲彈在水平方向不斷遠離，所以過了最高點後與大砲的距離顯然會增加。其實砲彈同時也在下墜，而當發射角度夠陡時，它確實會回頭接近大砲。

STEP 之外

對 r^2 而非 r 求導，再看 $\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$ 的正負，是判斷動點正在接近還是遠離的標準方法，在向量力學（vector mechanics）以至軌道（orbits）的研究中隨處可見。臨界角 $\arcsin(2\sqrt{2}/3)$ 是一個經典結果：仰角低於此值時，拋體（projectile）與發射點的距離永遠遞增。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）闡述了以向量處理運動的方法，令這類論證顯得自然而然。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。