詳細解答

STEP II 1991，第 10 題

純數學 • 三維空間中的直線與平面

> **STEP II 1991，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q10

關鍵思路

雖然題庫把這題歸入另一類別，但它其實是一道關於三維空間中直線與平面的題目。影子的尖端，就是剛好掠過棒頂的那道太陽光線與地面相交之處。因此，我們把這道光線寫成一條通過太陽與棒頂的直線，把地面寫成一個通過棒底並與棒垂直的平面，然後求兩者的交點。只要把所有位置都用沿棒方向的單位向量（unit vector）表示，一切便變得容易。

解答

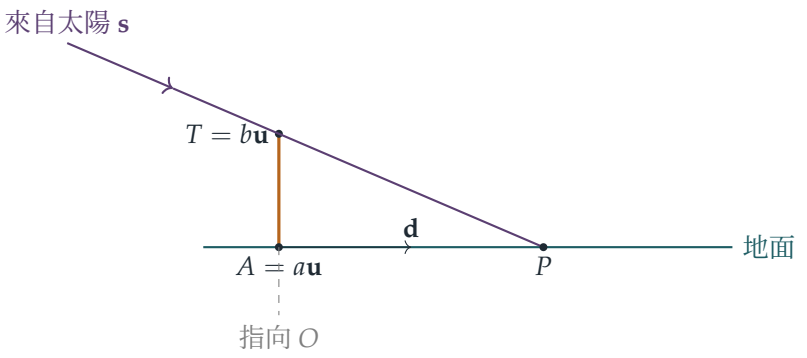
設 O 為地球的中心，並記

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{s} = R\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

那麼 $\mathbf{u}$ 是沿棒方向的單位向量，棒底為 $A = a\mathbf{u}$，棒頂為 $T = b\mathbf{u}$，而太陽位於 $\mathbf{s}$。我們唯一需要的點積（dot product）是

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} = R\sin\theta\cos\phi.$$

為簡便起見，記 $c = R\cos\phi\sin\theta$。



通過棒頂的光線

到達影子尖端 P 的光線，剛剛經過棒頂。所以 P 位於通過 $\mathbf{s}$ 與 $b\mathbf{u}$ 的直線上：

$$\mathbf{p} = \mathbf{s} + t\,(b\mathbf{u} - \mathbf{s}) = (1-t)\,\mathbf{s} + tb\,\mathbf{u}$$

其中 t 為某個實數。

地面

地面是水平的，即與棒垂直，並且通過棒底 $a\mathbf{u}$。由於 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$，地面就是平面 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{u} = a$。

求交點

把直線代入平面的方程，並利用 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$ 及 $\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} = c$，得

$$(1-t)c + tb = a \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{c-a}{c-b}.$$

我們可以除以 $c-b$，因為太陽正照着這根棒。在棒頂處，太陽位於地平線之上，當且僅當它位於該處切平面（tangent plane）的另一側，即 $\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} > b$，所以 $c > b$。

? **想一想** 這個 P 真的在棒後方的地面上，而不是在太陽背後的某處嗎？

由於 $c > b > a$，我們有 $c-a > c-b > 0$，所以 $t > 1$。$t = 0$ 的點是太陽，$t = 1$ 的點是棒頂，因此 $t > 1$ 表示已越過棒頂、背向太陽而行，正如所料。

由 t 的值可得

$$1 - t = \frac{(c-b)-(c-a)}{c-b} = \frac{a-b}{c-b} = -\frac{h}{c-b},$$
$$tb - a = \frac{b(c-a)-a(c-b)}{c-b} = \frac{c(b-a)}{c-b} = \frac{ch}{c-b}.$$

所以由棒底到影子尖端的位移（displacement）為

$$\begin{aligned}\mathbf{d} = \mathbf{p} - a\mathbf{u} &= (1-t)\,\mathbf{s} + (tb - a)\,\mathbf{u} \\ &= \frac{h}{c-b}(c\,\mathbf{u} - \mathbf{s}) \\ &= \frac{Rh}{c-b}\left[\cos\phi\sin\theta\begin{pmatrix}0\\ \cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{Rh}{c-b}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -(1-\cos^2\phi)\sin\theta\\ \cos\phi\sin\phi\sin\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由於 $1-\cos^2\phi = \sin^2\phi$ 及 $c - b = R\cos\phi\sin\theta - b$，上式即

$$\mathbf{d} = Rh\,(R\cos\phi\sin\theta - b)^{-1}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin^2\phi\sin\theta\\ \cos\phi\sin\phi\sin\theta\end{pmatrix},$$

這正是所要求的結果。

中間那一行 $\mathbf{d} = \frac{h}{c-b}(c\,\mathbf{u} - \mathbf{s})$ 值得留意。向量 $c\,\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{s}$ 沿棒方向的分量（component），所以 $c\,\mathbf{u} - \mathbf{s}$ 就是太陽位置向量（position vector）的水平部分的負值。影子正正指向與太陽的水平方向相反的一方，與日常經驗吻合。

驗算

- $\mathbf{d}\cdot\mathbf{u} = \frac{Rh}{c-b}\left(-\sin^2\phi\sin\theta\cos\phi + \cos\phi\sin^2\phi\sin\theta\right) = 0$，所以影子確實貼着地面。
- 取 $\phi = 0$，則棒沿 y 軸方向。這時 $\mathbf{d} = \frac{Rh}{R\sin\theta - b}(-\cos\theta, 0, 0)$。當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時，太陽在正上方，影子消失。當 R 極大時，影長趨向 $h\cot\theta$。這正是大家熟悉的結果：把地面視為平面、太陽仰角為 θ 時的影長。
- 數值方面，我們隨機選取了數千組 R, a, h, θ, ϕ 的值（太陽均在地平線之上），直接以光線與地平面相交的方法求出影子尖端的位置。結果每次都與公式吻合，最大相對誤差約為 10^{-13}。

常見錯誤

- 把地面當作平面 $y = a\cos\phi$，或其他坐標平面。「水平」的意思是與 $\mathbf{u}$ 垂直，即 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{u} = a$。

► 一開始就把所有東西按分量展開。把 **u** 和 **s** 保留為向量，直到最後一行才展開，可以省卻大量代數運算。

STEP 之外

在這裏，太陽光是通過同一點（太陽）的一族直線，所以影子是棒在地平面上的中心投影（central projection）。當太陽非常遙遠時，光線幾乎平行，這個投影便變成平行投影（parallel projection）。這正是線性代數（linear algebra）所研究的那類映射，而向量 $c\,\mathbf{u} - \mathbf{s}$ 就是 **s** 在棒上的投影減去 **s** 本身。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）詳細討論了在直線和平面上的投影。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。