詳細解答

STEP II 1991，第 1 題

純數學 • 二次方程與判別式

> **STEP II 1991，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q1

關鍵思路

一個二次式是某個完全平方（perfect square）的常數倍，當且僅當它有重根（repeated root），亦即它的判別式（discriminant）等於零。其後每一部分，都是把這一個條件應用於係數取決於 λ 的二次式。要找出令判別式等於零的 λ，便會得到一個關於 λ 的二次方程；至於分解式，則是解兩條以 f 和 g 為未知量的線性方程而得。

解答

形式 $(*)$ 的條件

展開得

$$a(x+k)^2 = ax^2 + 2akx + ak^2.$$

若 $\mathrm{h}(x)$ 具有這個形式，則比較係數（comparing coefficients）可得 $b = 2ak$ 及 $c = ak^2$，所以

$$b^2 = 4a^2k^2 = 4a \cdot ak^2 = 4ac.$$

反過來說，若 $b^2 = 4ac$，取 $k = \dfrac{b}{2a}$（由於 $a \neq 0$，這是可行的）。於是 $2ak = b$ 且 $ak^2 = \dfrac{b^2}{4a} = c$，所以 $\mathrm{h}(x) = a(x+k)^2$。因此所求條件為

$$b^2 = 4ac,$$

即判別式等於零。

λ 的兩個值

我們有

$$\mathrm{f}(x)+\lambda \mathrm{g}(x)=(3+\lambda)x^2+4x-2\lambda.$$

若 $\lambda=-3$，上式變成 $4x+6$。這並不屬於形式 $(*)$，因為該形式要求 x^2 的係數不為零。所以 $3+\lambda\neq 0$，而根據上面的條件，我們需要

$$16=4(3+\lambda)(-2\lambda) \iff \lambda^2+3\lambda+2=0 \iff (\lambda+1)(\lambda+2)=0.$$

所以 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=-2$，兩者皆不等於 -3。具體寫出來，就是

$$\mathrm{f}(x)-\mathrm{g}(x)=2x^2+4x+2=2(x+1)^2,$$
$$\mathrm{f}(x)-2\mathrm{g}(x)=x^2+4x+4=(x+2)^2.$$

分解式

想一想 關於 $\mathrm{f}-\mathrm{g}$ 和 $\mathrm{f}-2\mathrm{g}$ 的兩項事實，怎樣能讓我們分別求出 f 和 g？

把上面兩條恆等式看成以 $\mathrm{f}(x)$ 和 $\mathrm{g}(x)$ 為未知量的聯立線性方程（simultaneous linear equations）。從第一式減去第二式，得

$$\mathrm{g}(x)=2(x+1)^2-(x+2)^2,$$

然後 $\mathrm{f}(x)=(\mathrm{f}(x)-2\mathrm{g}(x))+2\mathrm{g}(x)=(x+2)^2+4(x+1)^2-2(x+2)^2$，即

$$\mathrm{f}(x)=4(x+1)^2-(x+2)^2.$$

展開驗算：$4(x^2+2x+1)-(x^2+4x+4)=3x^2+4x$，以及 $2(x^2+2x+1)-(x^2+4x+4)=x^2-2$。所以其中一個選擇是

$$A=4,\quad B=-1,\quad C=2,\quad D=-1,\quad m=1,\quad n=2.$$

把 m 和 n 的角色對調，便得到等價的答案 $m=2$、$n=1$、$A=-1$、$B=4$、$C=-1$、$D=2$。

最後部分

現在

$$\mathrm{f}(x)+\lambda \mathrm{g}(x)=(3+\lambda)x^2+4x+\lambda\alpha.$$

與之前一樣，$\lambda=-3$ 給出線性式 $4x-3\alpha$，它永遠不屬於形式 $(*)$。當 $\lambda\neq -3$ 時，條件 $b^2=4ac$ 變成

$$16=4(3+\lambda)\lambda\alpha \iff \alpha\lambda^2+3\alpha\lambda-4=0. \qquad (\dagger)$$

我們要求滿足 $(\dagger)$ 且 $\lambda\neq -3$ 的 λ 恰好只有一個。

想一想 (†) 會不會有兩個根，而其中一個正是不容許的值 $\lambda = -3$？

不會。把 $\lambda = -3$ 代入 (†) 的左方，得 $9\alpha - 9\alpha - 4 = -4 \neq 0$，所以 $\lambda = -3$ 永遠不是根。因此，符合要求的 λ 值正好就是 (†) 的根。

- 若 $\alpha = 0$，(†) 變成 $-4 = 0$，沒有解。所以 $\alpha \neq 0$。
- 若 $\alpha \neq 0$，(†) 是一個名副其實的關於 λ 的二次方程。它恰好有一個根，當且僅當其判別式等於零：

$$9\alpha^2 + 16\alpha = 0 \iff \alpha(9\alpha + 16) = 0 \iff \alpha = -\tfrac{16}{9},$$

這裏用到 $\alpha \neq 0$。

因此

$$\alpha = -\frac{16}{9}.$$

重根為 $\lambda = -\frac{3\alpha}{2\alpha} = -\frac{3}{2}$，而事實上

$$f(x) - \tfrac{3}{2}\left(x^2 - \tfrac{16}{9}\right) = \tfrac{3}{2}x^2 + 4x + \tfrac{8}{3} = \tfrac{3}{2}\left(x + \tfrac{4}{3}\right)^2.$$

驗算

代入一個測試值來檢查分解式：當 $x = 1$ 時，$4(2)^2 - (3)^2 = 7 = f(1)$，而 $2(2)^2 - 3^2 = -1 = g(1)$。在最後部分，$\frac{3}{2}(x + \frac{4}{3})^2$ 在 $x = 0$ 時的值是 $\frac{3}{2} \cdot \frac{16}{9} = \frac{8}{3}$，與 $\lambda\alpha = (-\frac{3}{2})(-\frac{16}{9})$ 吻合。以電腦測試所有滿足 $|p| \leq 60$、$q \leq 12$ 的有理數 $\lambda = p/q$，結果在中間部分恰好找到 $\lambda = -1, -2$，而當 $\alpha = -\frac{16}{9}$ 時只找到 $\lambda = -\frac{3}{2}$。

常見錯誤

- 忘記 (∗) 中 $a \neq 0$ 的要求：當 $\lambda = -3$ 時，該式是線性的，你應該說明為何要排除這個值。
- 在最後部分，只寫到「(†) 的判別式等於零」便停下來，沒有處理 $\alpha = 0$ 的情況；這時 (†) 根本不是二次方程，而且沒有根。

STEP 之外

把 f 和 g 寫成兩個線性型的平方的組合，就是把一對二次型（quadratic forms）同時對角化（simultaneous diagonalisation）。令 $f + \lambda g$ 退化（degenerate）的 λ 值，就是對應的對稱矩陣（symmetric matrices）所滿足的方程 $\det(F + \lambda G) = 0$ 的根，這是一個「廣

義特徵值」（generalised eigenvalue）問題。在最後部分，兩個 λ 值重合，這正是這種對角化可能失敗的情況。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）正是以這種觀點處理二次型和特徵值。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。