詳細解答

# STEP I 1991，第 9 題

純數學 • 不等式與調和級數

> **STEP I 1991，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q9

## 關鍵思路

在第 (i) 部分，每一條不等式（inequality）都把 $x$ 夾在兩個 $k$ 次方根之間，竅門是找出互相矛盾的一個下界（lower bound）和一個上界（upper bound）。要在不用計算機的情況下比較立方根與五次方根，可把兩邊同時取十五次方。在第 (ii) 部分，我們用（項數）×（最小的項）作為一個長和式的下界。然後把這種形狀、互不相交的區塊串連起來，使調和級數（harmonic series）要多大有多大。

## 解答

### 第 (i) 部分

由於 $x > 1$，$x$ 的每一個冪都是正數，而把兩個正數之間的不等式兩邊同時取正數次方，不等號的方向不變。以下會一直用到這一點。

為了引出矛盾，假設 $n \geq 5$。那麼第三條和第五條不等式必然成立：

$$x^3 > 3 \qquad 及 \qquad x^5 < 6.$$

把第一式取五次方，第二式取三次方：

$$x^{15} > 3^5 = 243 \qquad 及 \qquad x^{15} < 6^3 = 216.$$

由此得 $243 < x^{15} < 216$，這是不可能的。所以 $n \geq 5$ 不會發生，因此 $n \leq 4$。

**想一想** 你怎樣知道要選第三條和第五條不等式？

每一條不等式都說明 $k^{1/k} < x < (k+1)^{1/k}$。下界 $k^{1/k}$ 依次為 1、1.41、1.44、1.41、1.38、...，在 $k = 3$ 時最大。上界 $(k+1)^{1/k}$ 則遞減，而 $6^{1/5} \approx 1.43$ 是第一個跌到 $3^{1/3} \approx$

1.44 以下的。粗略心算一下便能找到這一對，然後十五次方就能嚴格地證明它。（$n = 4$ 這個值確實可以出現。例如 $x = 1.45$ 給出 $x^2 = 2.1025$、$x^3 \approx 3.05$、$x^4 \approx 4.42$。）

**第 (ii) 部分**

設 $n \geq 2$。和式 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ 共有 $n^2 - n$ 項，每一項都不小於最後一項 $\frac{1}{n^2}$。由於 $n \geq 2$，項數 $n^2 - n \geq 2$，所以第一項 $\frac{1}{n+1}$ 嚴格大於 $\frac{1}{n^2}$。因此

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > (n^2 - n) \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

兩邊同時加上 $\frac{1}{n}$，

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1,$$

這正是所要證明的。

**使調和和超過 10** 每一個區塊 $\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m^2}$（其中 $m \geq 2$）的貢獻都大於 1。要同時使用多個區塊，它們必須互不重疊，所以我們讓每個新區塊緊接在上一個區塊結束之後開始。定義

$$a_1 = 2, \qquad a_{k+1} = a_k^2 + 1,$$

於是 $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 26$, $a_4 = 677, \ldots$。第 $k$ 個區塊由 $\frac{1}{a_k}$ 到 $\frac{1}{a_k^2}$，而下一個區塊由 $\frac{1}{a_k^2+1} = \frac{1}{a_{k+1}}$ 開始。所以 $k = 1, \ldots, 9$ 的各個區塊互不相交而且首尾相接，合起來剛好涵蓋 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{a_9^2}$。因此

$$\sum_{n=1}^{a_9^2} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k=1}^{9} \left( \frac{1}{a_k} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) > 1 + 9 = 10.$$

? **想一想** $a_9^2$ 是一個龐大無比的數。我們能否改為給出一個明確的 $N$？

可以，只要給 $a_k$ 定出上界。我們斷言 $a_k < 2^{2^k}$。當 $k = 1$ 時，由於 $2 < 4$，斷言成立。若 $a_k < 2^{2^k}$，則 $a_k \leq 2^{2^k} - 1$，所以

$$a_{k+1} = a_k^2 + 1 \leq (2^{2^k} - 1)^2 + 1 = 2^{2^{k+1}} - 2^{2^k+1} + 2 < 2^{2^{k+1}}.$$

於是由歸納法（induction）可知 $a_9 < 2^{512}$ 及 $a_9^2 < 2^{1024}$。再加上更多正數項只會令和變得更大，所以

$$N = 2^{1024} \quad \text{給出} \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > 10.$$

任何更大的 $N$ 同樣可行。

另一做法：把各項分成區塊 $\frac{1}{2^j+1}+\cdots+\frac{1}{2^{j+1}}$，每個區塊有 $2^j$ 項，而且每一項都不小於 $\frac{1}{2^{j+1}}$，由此可見當 $j \geq 1$ 時每個區塊都大於 $\frac{1}{2}$，當 $j = 0$ 時則等於 $\frac{1}{2}$。所以 $\sum_{n=1}^{2^{18}} \frac{1}{n} > 1+\frac{18}{2} = 10$，而 $N = 2^{18} = 262\,144$ 是一個小得多的答案。

## 驗算

- 第 (i) 部分：從數值上看，當 $n = 4$ 時，各條不等式剩下 $x \in (3^{1/3}, 5^{1/4}) \approx (1.442, 1.495)$。加入第五條不等式後必須有 $x < 6^{1/5} \approx 1.431$，於是甚麼也不剩。
- 第 (ii) 部分：用準確分數計算，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$，而且對由 2 到 39 的每一個 $n$，區塊的和都大於 1。
- 調和和在 $N = 12\,367$ 時首次超過 10，所以任何正確的答案都必須不小於這個數。$2^{18}$（此時和約為 13.05）和 $2^{1024}$ 都綽綽有餘。

## 常見錯誤

- 把不等式取次方時，沒有指出兩邊都是正數（這裏由 $x > 1$ 保證）。
- 使用區塊 $[2,4]$、$[4,16]$、$[16,256]$、...，這些區塊共用端點，以致有些項被重複計算了兩次。
- 在第 (ii) 部分寫了 $\geq$ 而不是 $>$，卻沒有檢查至少有一項嚴格大於 $\frac{1}{n^2}$。

## STEP 之外

第 (ii) 部分是柯西凝聚（Cauchy condensation）這個想法的一個版本。它證明了調和級數發散（diverge），只是發散得慢得驚人：它的部分和（partial sum）的增長有如 $\ln N + \gamma$，其中 $\gamma \approx 0.5772$ 是歐拉－馬斯刻若尼常數（Euler–Mascheroni constant）。把和式與積分作比較，便可得出這個增長率，也令最小的 $N$ 容易估算（$e^{10-\gamma} \approx 12\,367$）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本實分析入門書）對凝聚法和級數的收斂（convergence）有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。