詳細解答

STEP I 1991，第 8 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 1991，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q8

關鍵思路

代換（substitution）$y = \pi - x$ 把 $[0, \pi]$ 映射到自身，並且令 $\sin x$ 保持不變，卻把礙事的因子 x 變成 $\pi - y$。把原積分與它反射後的版本相加，x 便完全消失。在第 (ii) 部分，被積函數（integrand）由一個函數及其導數構成，因此只要選對一個代換，便可一步到位。

解答

第 (i) 部分

設 $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$。我們需要一個能把 $[0, \pi]$ 兩端對調、同時令 $\sin x$ 保持不變的代換，故取 $k = \pi$：令 $x = \pi - y$，於是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$，$\sin x = \sin(\pi - y) = \sin y$，而 $x = 0, \pi$ 分別對應 $y = \pi, 0$。因此

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{0} (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_0^{\pi} (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y - I, \end{aligned}$$

這是因為 y 只是啞變數（dummy variable），所以最後一個積分就是 I 本身。由此可得

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

? **想一想** 怎樣由 $\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}$ 得出 $\pi \int_0^{\pi/2}$？

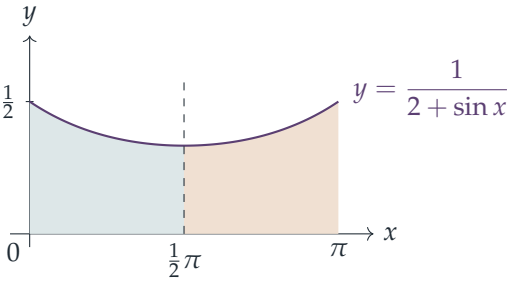
由於 $\sin(\pi - x) = \sin x$，$\mathrm{f}(\sin x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的圖像關於 $x = \frac{1}{2}\pi$ 對稱。要嚴格說明這一點，可把積分在 $\frac{1}{2}\pi$ 處分成兩段，並對後半段使用同一個代換 $x = \pi - y$：

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{0} \mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_{0}^{\pi/2} \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y.$$

所以 $\int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$，因此

$$\int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x,$$

這正是所要證明的結果。



現取 $\mathrm{f}(u) = \dfrac{1}{2+u}$，它在 $u \in [-1, 1]$ 上連續（continuous）。於是

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}.$$

餘下的積分可用 $t = \tan\frac{1}{2}x$ 處理，此時

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

而 $x = 0, \frac{1}{2}\pi$ 分別對應 $t = 0, 1$。於是

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{2(1+t^2)+2t} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\sqrt{3} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi^2}{9}.$$

第 (ii) 部分

想一想 $(\sin^{-1} t)^2$ 的導數是甚麼？

根據鏈式法則（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin^{-1} t)^2 = \frac{2\sin^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}},$$

這恰好是與餘弦相乘的那個因子（的兩倍）。所以作代換 $u = (\sin^{-1} t)^2$，其中 $\mathrm{d}u = \dfrac{2\sin^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$。當 $t = 0$ 時，$u = 0$；當 $t = 1$ 時，$\sin^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi$，故 $u = \frac{1}{4}\pi^2$。因此

$$\int_0^1 \frac{(\sin^{-1} t)\cos[(\sin^{-1} t)^2]}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2/4} \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi^2}{4}.$$

被積函數在 $t = 1$ 處趨向無窮，所以嚴格來說這是一個瑕積分（improper integral）。代換把這個問題處理得乾淨利落：以 $\theta = \sin^{-1} t$ 表示，該積分就是 $\int_0^{\pi/2} \theta\cos\theta^2\,\mathrm{d}\theta$，其被積函數連續，所以積分收斂（converges），而上面求得的值是正確的。（分兩步來做，先作 $\theta = \sin^{-1} t$，再作 $u = \theta^2$，也是完全可行的另一種做法。）

答案 $\frac{1}{2}\sin\frac{1}{4}\pi^2$ 是精確值，無法再化簡：$\frac{1}{4}\pi^2$ 並不是一個「漂亮」的角，想必這就是考官提醒考生不要動用計算機的原因。

驗算

- 以辛普森法則（Simpson's rule）計算，得 $\int_0^{\pi} x/(2+\sin x)\,\mathrm{d}x \approx 1.899406$，而 $\pi^2/(3\sqrt{3}) \approx 1.899406$。
- 快速檢查一下是否合理：$\frac{1}{3} \le \frac{1}{2+\sin x} \le \frac{1}{2}$，所以該積分介乎 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 \approx 1.64$ 與 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 \approx 2.47$ 之間。
- 第 (i) 部分的恆等式可用 $\mathrm{f}(u) = 1$ 來檢驗：兩邊都等於 $\frac{1}{2}\pi^2$。
- 至於第 (ii) 部分，$\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{4}\pi^2) \approx 0.312133$，與 $\int_0^{\pi/2}\theta\cos\theta^2\,\mathrm{d}\theta$ 的數值計算結果吻合。

常見錯誤

- 做到 $I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$ 便停下來，沒有說明為何可以把積分範圍減半。
- 作代換 $t = \tan\frac{1}{2}x$ 時忘記更改積分上下限（上限變成 1，而不是 ∞）。
- 在第 (ii) 部分漏掉因子 $\frac{1}{2}$：$\mathrm{d}u$ 帶有一個 2。

STEP 之外

第 (i) 部分的技巧，是利用區間的對稱性來計算 $\int x\,g(x)\,\mathrm{d}x$，全程無須求出原函數（antiderivative）。這是一個重要主題的小小例子：要知道一個積分的值，藉助對稱性往往比直接計算省力得多。第 (ii) 部分則觸及瑕積分的理論：變數代換可以把無界的被積函數變成連續函數。Abbott 的 *Understanding Analysis* 嚴格地建立了變數代換定理（change-of-variables theorem），而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則收錄了更多這類積分。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。