詳細解答

STEP I 1991，第 7 題

純數學 • 可分離變量微分方程

> **STEP I 1991，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q7

關鍵思路

兩個變化率都是 $(1+V/V_0)^2$ 的常數倍，所以最自然的變數是 $u = 1+V/V_0$，它滿足 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \pm c\,u^2$。分離變數（separating the variables）後可見，倒數 $w = 1/u$ 只是隨時間線性變化：在增長年以速率 a 下降，在衰退年以速率 b 上升。於是整個問題歸結為追蹤一條由直線段組成的圖像，並回答兩個問題：w 會否到達 0（金額變成無限大），又會否到達 1（國庫空了）？

解答

建立模型

以年為單位量度 t，並寫 $V = kV_0$，於是 $u = 1+k$，且 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = V_0\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$。在增長年，

$$V_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = aV_0u^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = a \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) = -a,$$

同理，在衰退年（只要 $V>0$），$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) = +b$。因此，設

$$w = \frac{1}{1+V/V_0},$$

則 w 在增長期間以速率 a 線性下降，在衰退期間以速率 b 線性上升。注意 $V \geq 0$ 對應 $0 < w \leq 1$：國庫空了當且僅當 $w=1$，而 $V\to\infty$ 當且僅當 $w\to 0^+$。

不等式的意義

開始時 $w = w_0 = \frac{1}{1+k_0}$，而在第一年內 $w = w_0 - at$。於是：

- $k_0 \geq 0$ 只是說國庫的存款不可能是負數。
- 金額在整個第一年內保持有限，當且僅當 w 直到 $t = 1$ 都保持正值，即 $w_0 - a > 0$，亦即
$$\frac{1}{1+k_0} > a \iff 1 + k_0 < \frac{1}{a} \iff k_0 < a^{-1} - 1.$$
假如這個條件不成立，V 便會在時間 $t = w_0/a \leq 1$，即第一年之內，變成無限大；對任何描述真實國庫的模型來說，這都是荒謬的。

兩個不等式合起來還迫使 $a^{-1} - 1 > 0$，即 $a < 1$；我們會在最後用到這一點。

撐過第二年

第一年結束後 $w_1 = \frac{1}{1+k_1}$（事實上 $w_1 = w_0 - a$）。在衰退年內，只要 $w < 1$，就有 $w = w_1 + bt$。國庫在年底仍未空，當且僅當 w 到 $t = 1$ 時仍未到達 1：

$$\frac{1}{1+k_1} + b < 1 \iff b < \frac{k_1}{1+k_1}.$$

特別地，我們需要 $b < 1$，這時上式可整理成

$$k_1 > \frac{b}{1-b}.$$

反之，若 $b \geq \frac{k_1}{1+k_1}$，存款會在時間 $t = (1 - w_1)/b \leq 1$ 耗盡，並在該年餘下的時間一直維持為零。

第三年的無限增長

> **想一想** 假如國庫在第二年空了，會怎樣？它還有可能在第三年爆破嗎？

若國庫在第二年年底是空的，第三年便由 $w = 1$ 開始，且 $w = 1 - at$；由於 $a < 1$，它在整年內都保持正值。所以空了的國庫不可能在第三年爆破，我們只需考慮存款撐得過第二年的情況。

在這情況下 $w_2 = w_1 + b = \frac{1}{1+k_0} - a + b$，而在第三年 $w = w_2 - at$。金額在第三年內變成無限大，當且僅當 w 在 $t = 1$ 或之前到達 0，即 $w_2 \leq a$：

$$\frac{1}{1+k_0} - a + b \leq a \iff b \leq 2a - \frac{1}{1+k_0}.$$

我們必須檢查這與「但不會更早」是否一致。

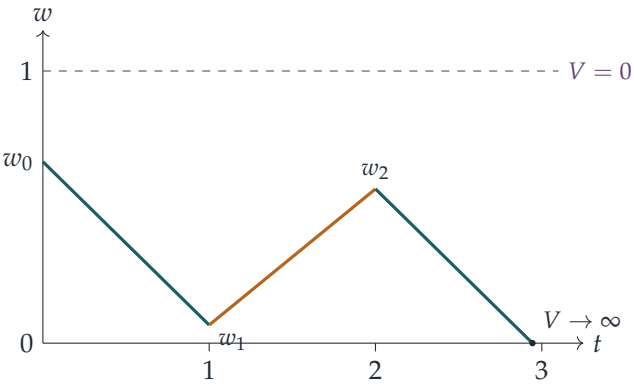
- $k_0 < a^{-1} - 1$ 保證了第一年不會爆破；第二年金額正在減少，也不可能爆破。
- 存款撐得過第二年：若 $w_2 \leq a$，則因 $a < 1$ 而有 $w_2 < 1$，所以存活條件 $w_2 < 1$ 自動成立。

因此，模型預測第三年出現無限增長而不會更早，當且僅當

$$b \leq 2a - \frac{1}{1+k_0}.$$

若不等式嚴格成立，V 會在第三年開始後的時間 $t = w_2/a < 1$ 變成無限大；在等號成立的情況下，$V \to \infty$ 恰好發生在第三年結束之時。（由於 $b > 0$，這只有在 $2a > \frac{1}{1+k_0}$，即 $k_0 > \frac{1}{2a} - 1$ 時才可能發生。）

下圖顯示 $a = 0.6$、$b = 0.5$、$k_0 = 0.5$ 時 w 對 t 的圖像，這是條件成立的一個例子。



驗算

在上面的例子中，$k_1 = 14$，存活條件 $14 > \frac{0.5}{0.5} = 1$ 成立；然後 $k_2 = \frac{13}{17} \approx 0.765$，而第三年的爆破發生在 $t = w_2/a \approx 0.944$，與 $2a - \frac{1}{1+k_0} - b = \frac{1}{30} > 0$ 一致。我們亦以數值方法（四階龍格－庫塔法，Runge–Kutta）對這些微分方程（differential equations）作積分，隨機選取了 300 組 a、b 和 k_0：k_1 和 k_2 的閉合式與數值結果相差約 10^{-11}，而存活準則和爆破準則在每一個情況下都正確預測了數值結果。

常見錯誤

- 忘記國庫可能在第二年空了。在這題中，由於 $a < 1$，這並無影響，但必須說明。
- 把爆破條件弄反：爆破對應的是 $1/(1+k)$ 到達 0，而不是 k 到達 0。
- 把 $\frac{1}{1+k_1} + b < 1$ 整理成關於 k_1 的條件時，忽略了 $b < 1$ 這個要求。

STEP 之外

方程 $\dot{u} = au^2$ 是有限時間爆破（finite-time blow-up）的標準例子：與指數增長不同，它的解可以在有限時間內變成無限大，所以微分方程的解不一定對所有時間都存在。在大學第一門常微分方程（ODE）課程中，解的局部存在性（local existence）與整體存在性（global existence）之分，正是在這裏出現。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）在處理非線性一階方程時討論了這一點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。