詳細解答

STEP I 1991，第 6 題

純數學 • 駐點與廣義積分

> **STEP I 1991，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q6

本題在 *Beyond STEP* 第 3.1 節找出錯處中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/spot-the-flaw.html

關鍵思路

甚麼都不要輕信：每一項計算都要親自重做一遍，並在每個「因此」或「所以」之處問一問，這一步是否真的成立。在 (i) 中，導數（derivative）算錯了；而且即使駐點（stationary point）求對了，其後關於極大值、極小值和全局界的推理仍然有毛病。在 (ii) 中，原函數（antiderivative）是錯的；更嚴重的是，被積函數（integrand）在區間內部趨向無窮，所以微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）根本不能使用。

解答

第 (i) 部分

第 1 步：駐點。由商法則（quotient rule），

$$g'(x) = \frac{6x^2(x^4+4) - 4x^3(2x^3+3)}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^6 - 12x^3 + 24x^2}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^2\,(x^4+6x-12)}{(x^4+4)^2}.$$

所以 $g'(x) = 0$ 當且僅當 $x = 0$ 或 $h(x) = 0$，其中 $h(x) = x^4 + 6x - 12$。現在 $h(1) = -5$ 而 $h(-1) = -17$，所以 $x = \pm 1$ 並不是駐點：事實上 $g'(1) = \frac{2}{5}$ 而 $g'(-1) = \frac{34}{25}$。原來的論斷在第一步就已經不成立。

h 有多少個根？由於 $h'(x) = 4x^3 + 6$ 只在 $x_0 = -(3/2)^{1/3}$ 處為零，h 先遞減後遞增，所以它最多穿過零兩次。另外 $h(0) = -12 < 0$，而且當 $x \to \pm\infty$ 時 $h(x) \to +\infty$，所以

它最少穿過零兩次。因此 h 恰好有兩個實根 $\beta < 0 < \alpha$。由於 $h(1) < 0 < h(2) = 16$ 及 $h(-3) = 51 > 0 > h(-2) = -8$，

$$1 < \alpha < 2, \qquad -3 < \beta < -2,$$

而數值上 $\alpha \approx 1.386$，$\beta \approx -2.247$。

第 2 步：駐點處的函數值。$\mathrm{g}(0) = \frac{3}{4}$ 是對的，$\mathrm{g}(1) = 1$ 也是對的，但 $\mathrm{g}(-1) = \frac{1}{5}$，而不是 1（何況 ± 1 這兩點根本都不是駐點）。在 h 的根 t 處，我們有 $t^4 = 12 - 6t$，所以 $t^3 = (12 - 6t)/t$，並且

$$\mathrm{g}(t) = \frac{2(12-6t)/t + 3}{16 - 6t} = \frac{24 - 9t}{t(16-6t)} = \frac{3(8-3t)}{2t(8-3t)} = \frac{3}{2t},$$

其中約去了 $8 - 3t \neq 0$（因為 $t = \frac{8}{3}$ 不是 h 的根）。所以駐點處的函數值是 $\mathrm{g}(0) = \frac{3}{4}$、$\mathrm{g}(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} \approx 1.083$ 和 $\mathrm{g}(\beta) = \frac{3}{2\beta} \approx -0.668$。

想一想 如果一個駐點處的函數值比另一個小，較小的那個就一定是極小值嗎？

第 3 步：駐點的性質。不一定。比較駐點處的*函數值*，完全不能告訴我們駐點的性質；我們必須考察 g' 在駐點兩側的正負號（或者考察 g''）。由因式分解後的形式可見，當 $x \neq 0$ 時，$\mathrm{g}'(x)$ 的正負號與 $-h(x)$ 的正負號相同，因為 $x^2 > 0$ 而 $(x^4+4)^2 > 0$。由於在 (β, α) 上 $h < 0$，而在 $[\beta, \alpha]$ 之外 $h > 0$：

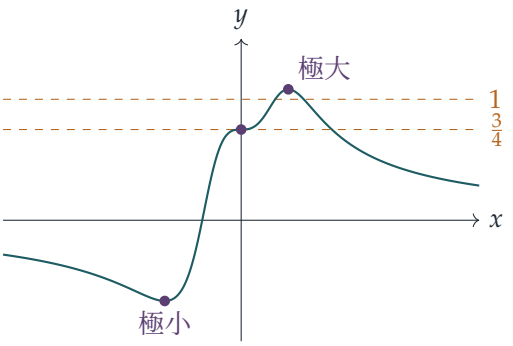
- g 在 $x < \beta$ 時遞減，在 (β, α) 上遞增，在 $x > \alpha$ 時遞減；
- $x = \beta$ 是極小點，而 $x = \alpha$ 是極大點；
- 在 $x = 0$ 處，兩側都有 $\mathrm{g}' > 0$，所以 $x = 0$ 是駐拐點（stationary point of inflection），而不是極小點。

第 4 步：全局界。即使局部極大值和極小值都求對了，要得出「對所有 x」都成立的界，還需要更多論據：函數可以在別處超過某個局部極大值，例如當 $x \to \pm\infty$ 時。這裏當 $x \to \pm\infty$ 時 $\mathrm{g}(x) \to 0$（分母的次數較高），而且由於 $x^4 + 4 > 0$，g 處處連續。把這些與第 3 步的單調性（monotonicity）結合起來，g 由接近 0 的值下降至 $\mathrm{g}(\beta)$，再上升至 $\mathrm{g}(\alpha)$，然後回落並趨向 0。因此正確的結論是

$$\frac{3}{2\beta} \leq \mathrm{g}(x) \leq \frac{3}{2\alpha} \quad \text{對所有} x, \qquad \text{即約為} -0.668 \leq \mathrm{g}(x) \leq 1.083,$$

而且兩個界都可以取到。

結論。$\frac{3}{4} \leq \mathrm{g}(x) \leq 1$ 這個結論在兩端都不成立：$\mathrm{g}(-1) = \frac{1}{5} < \frac{3}{4}$（其實只要 $2x^3 + 3 < 0$ 就有 $\mathrm{g}(x) < 0$），而 $\mathrm{g}(\alpha) > 1$ 是因為 $\alpha < \frac{3}{2}$（驗證：$h(\frac{3}{2}) = \frac{81}{16} - 3 > 0$，所以 $\alpha < \frac{3}{2}$，從而 $\frac{3}{2\alpha} > 1$）。



第 (ii) 部分

第 1 步：不定積分。題中給出的答案是錯的：對 $-3(1-x)^{-4}$ 求導得到 $-12(1-x)^{-5}$，而不是 $(1-x)^{-3}$。冪次應該增加 1，由 -3 變為 -2。由於

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x)^{-2} = -2(1-x)^{-3}\cdot(-1) = 2(1-x)^{-3},$$

正確的結果是

$$\int (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(1-x)^{-2} + c, \qquad x \neq 1.$$

? **想一想** 用正確的原函數，在 -1 與 3 之間同樣得到 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = 0$。那麼答案終究還是 0 嗎？

第 2 步：定積分。不是。只有當 $F' = f$ 在整個區間上成立，而且 f 在該區間上連續時，計算 $[F(x)]_{-1}^{3}$ 才有根據。這裏 $(1-x)^{-3}$ 在 $x = 1$ 處沒有定義，而這一點位於 $[-1,3]$ 之內，並且函數在該點附近無界，所以這是一個瑕積分（improper integral），必須定義為兩段各自的極限：

$$\int_{-1}^{1-\varepsilon} (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon^{-2} - \tfrac{1}{4}\right) \to +\infty \quad (\varepsilon \to 0^{+}),$$
$$\int_{1+\delta}^{3} (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4} - \delta^{-2}\right) \to -\infty \quad (\delta \to 0^{+}).$$

兩段都發散（diverge），所以這個積分不存在；「$\infty - \infty$」沒有值。從幾何上看這也合理：被積函數在 $x < 1$ 時為正，在 $x > 1$ 時為負，而兩邊各自圍出的面積都是無窮大。

結論。兩步都是錯的，而且照原樣來說結論並不成立：$\int_{-1}^{3}(1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x$ 沒有定義。這個「0」只有在挖去一個對稱的缺口，即 $\varepsilon = \delta$ 時，才算有幾分道理：這時兩段恰好互相抵消，極限是 0（即柯西主值，Cauchy principal value）。但假如取 $\delta = 2\varepsilon$，兩段之和便是 $\frac{1}{2}(\varepsilon^{-2} - \frac{1}{4}\varepsilon^{-2}) \to \infty$，所以答案取決於我們怎樣趨近 $x = 1$，這正是這個積分沒有定義的原因。

驗算

在隨機選取的點上，g 的數值導數與因式分解後的公式吻合；$g'(1) = 0.4 \neq 0$。用二分法（bisection）求得 $\alpha \approx 1.3856$，$\beta \approx -2.2467$，並且 $g(\alpha) = 1.0825 = 3/(2\alpha)$，$g(\beta) = -0.6676 = 3/(2\beta)$；在 $[-100, 100]$ 上對 g 取樣，可確認這兩個值就是全局最大值和最小值。至於 (ii)，在 $[-1, 0.99]$ 上用中點求積法（midpoint quadrature）得到約 4999.87，與 $\frac{1}{2}(10^4 - \frac{1}{4})$ 吻合，而對應的另一段在 $[1.01, 3]$ 上得到 -4999.87。

常見錯誤

- 靠比較駐點處的函數值來判斷駐點的性質。
- 聲稱得到全局界時，忘記考慮 $x \to \pm\infty$ 時的表現。
- 跨過被積函數趨向無窮的點使用 $[F(x)]_a^b$；務必先檢查被積函數在 $[a, b]$ 上是否連續。

STEP 之外

第 (ii) 部分講的是瑕積分：若積分區間包含奇點（singularity），積分便要定義為極限，而且只有當兩個單側極限各自存在時，積分才收斂（converge）。對稱極限，即柯西主值，在複分析（complex analysis）和物理學中確實是很有用的概念，但它是另一回事。第 (i) 部分講的是局部極值與全局極值之間的差距，數學分析藉極值定理（extreme value theorem）把這一點說得精確。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對這兩個課題都有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。