詳細解答

STEP I 1991，第 5 題

純數學 • 正則向量組

> **STEP I 1991，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q5

關鍵思路

條件 (ii) 說這些向量（vector）之和為 $\mathbf{0}$，而要把一條向量等式化為一個數，最省力的方法就是與其中一個向量取點積（dot product），條件 (i) 正好告訴我們怎樣計算這些點積。此後，整道題目其實是在點算數目：若一個向量與某幾個固定向量的點積全部已被指定，它可處的位置就寥寥無幾，所以集合內只容得下少數幾個向量。

解答

恆等式 $(n-1)\beta = -\alpha^2$

由 (ii)，$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$。將等式兩邊與 $\mathbf{a}_1$ 取點積。由 (i)，$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1$ 一項等於 α^2，而其餘 $n-1$ 項 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_j$（$j \neq 1$）每項均為 β，所以

$$\alpha^2 + (n-1)\beta = 0, \qquad \text{即} \qquad (n-1)\beta = -\alpha^2,$$

這正是所要證明的。特別地，$\beta = -\alpha^2/(n-1) < 0$。

二維情況

現在 $\alpha^2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1$，所以每個 $\mathbf{a}_i$ 都是單位向量（unit vector），並且

$$\beta = -\frac{1}{n-1}.$$

對 $i \geq 2$，設 $\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$。條件 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_i = \beta$ 即是 $x_i = \beta$，於是 $|\mathbf{a}_i| = 1$ 迫使 $y_i = \pm\sqrt{1-\beta^2}$。因此，除 $\mathbf{a}_1$ 以外的每個向量都必定是以下兩者之一：

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \beta \\ -\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}.$$

想一想 知道了候選向量之後，怎樣限制 n 的大小？

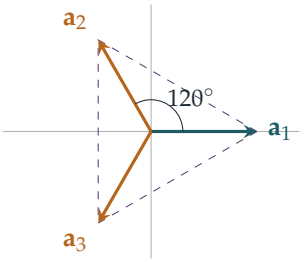
集合中的向量互不相同，所以 $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 是 $n-1$ 個不同的候選向量。候選向量最多只有兩個，所以 $n-1 \leq 2$，即 $n \leq 3$。由於 $n \geq 2$，故 $n = 2$ 或 $n = 3$。

$n = 2$。此時 $\beta = -1$，兩個候選向量重合，$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$。這確實可行：$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = -1 = \beta$，而且 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$。

$n = 3$。此時 $\beta = -\frac{1}{2}$，$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，而 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 必須是那兩個不同的候選向量：

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

（次序不拘）。驗算：$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} = \beta$，而三個向量之和為 $\mathbf{0}$。它們指向一個以原點為中心的等邊三角形（equilateral triangle）的頂點。



（確定 β 的另一個方法：當 $n \geq 3$ 時，我們有 $-1 < \beta < 0$，所以兩個候選向量確實不同，而 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 必須分別是這兩個向量。於是 $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \beta^2 - (1-\beta^2) = 2\beta^2 - 1$，令它等於 β 便得 $(2\beta+1)(\beta-1) = 0$。所以 $\beta = -\frac{1}{2}$，這同樣表示 $n = 3$。）

三維情況

同樣有 $\alpha = 1$ 及 $\beta = -1/(n-1)$。$n = 2$ 的情況與之前一樣：$\beta = -1$，而滿足 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = -1$ 的單位向量只有 $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1 = (-1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，它位於 x-y 平面上。所以 $\{\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_1\}$ 是其中一個答案。

現在假設 $n \geq 3$，於是 $-\frac{1}{2} \leq \beta < 0$。由於 $\mathbf{a}_2$ 位於 x-y 平面上，沿用二維情況的論證可得

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \varepsilon\sqrt{1-\beta^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

而且因為 $\beta \neq \pm 1$，y 分量 $y_2 = \varepsilon\sqrt{1-\beta^2}$ 不等於零。

想一想 對於 $i \geq 3$，這些條件對 $\mathbf{a}_i$ 有甚麼要求？

對 $i \geq 3$，設 $\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i)^{\mathrm{T}}$。則

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_i = \beta &\implies x_i = \beta, \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_i = \beta &\implies \beta^2 + y_2 y_i = \beta \implies y_i = \frac{\beta(1-\beta)}{y_2}, \\ |\mathbf{a}_i| = 1 &\implies z_i^2 = 1 - \beta^2 - y_i^2. \end{aligned}$$

所以對每個 $i \geq 3$，x_i 和 y_i 都相同，而 z_i 只能是兩個平方根的其中之一。由於各向量互不相同，$\mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$ 當中最多只有兩個向量，所以 $n - 2 \leq 2$，即 $n \leq 4$。

$n = 3$。由 (ii)，$\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$，它位於 x-y 平面上。所以這個集合是平面 $z = 0$ 上的一個正則集（regular set），根據二維情況的結果，它就是

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{a}_2$ 可以是後兩者的任何一個。（這與上面的公式吻合：$\beta = -\frac{1}{2}$ 給出 $y_3 = -y_2$ 及 $z_3^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$。）

$n = 4$。此時 $\beta = -\frac{1}{3}$，所以 $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$，而 $y_2 = \varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3}$。於是

$$y_i = \frac{(-\frac{1}{3})(\frac{4}{3})}{\varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\varepsilon\frac{2}{3\sqrt{2}} = -\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{3}, \qquad z_i^2 = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{3}.$$

由於 $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{a}_4$，它們必須分別取兩個相反的值 $z = \pm\sqrt{2/3} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$。由此得出

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix},$$

對應 $\varepsilon = \pm 1$ 的每個選擇各有一個集合。我們至今只用了涉及 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$ 的條件，所以仍須檢查其餘條件。首先，$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{1}{3} = \beta$。其次是向量之和：$x$ 分量給

出 $1-3\cdot\frac{1}{3}=0$，y 分量給出 $\varepsilon\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=0$，而 z 分量互相抵銷。所以兩個集合都是正則集。從幾何上看，這四個向量指向一個以原點為中心的正四面體（regular tetrahedron）的頂點。

總結。所有正則集為：$\{\mathbf{a}_1,-\mathbf{a}_1\}$（$n=2$）；$x$-$y$ 平面上的等邊三角形（$n=3$）；以及上述兩個正四面體（$n=4$，$\varepsilon=\pm1$，兩者關於 x-z 平面互為鏡像）。不存在 $n\geq 5$ 的正則集。

驗算

在每個集合中，向量之和應為零，而且所有兩兩之間的點積都應相等。對於正四面體，任意兩個向量之間的夾角為 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})\approx 109.47°$，即大家熟悉的甲烷鍵角，而恆等式給出 $(4-1)(-\frac{1}{3})=-1=-\alpha^2$。我們以數值方法檢查了全部五個集合（格拉姆矩陣和形心（centroid）準確至 10^{-12}），並在平面上進行窮舉搜尋，在 n 不超過 11 的範圍內，只在 $n=2$ 和 $n=3$ 時找到正則集。

常見錯誤

- 忘記向量必須*互不相同*：正是這個條件，才把「最多兩個候選向量」變成 n 的上界。
- 在 $n=4$ 的情況中，利用 $\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$ 與 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 的點積求出它們之後，沒有檢查 $\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_4=\beta$ 和形心條件。
- 遺漏 $n=2$ 的情況，或遺漏三維情況中正負號 ε 的選擇。

STEP 之外

這些集合就是正單純形（regular simplex）的頂點：在 $(n-1)$ 維空間中的 n 個點，兩兩之間的距離全部相等。由點積組成的矩陣（matrix）$G=(\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j)$（即*格拉姆矩陣*（Gram matrix））等於 $(\alpha^2-\beta)I+\beta J$，其中 J 是所有元素皆為一的矩陣。它的秩（rank）是 $n-1$，而格拉姆矩陣的秩不能超過空間的維數，由此立即得出在 d 維空間中 $n\leq d+1$。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教材）涵蓋了秩、點積和格拉姆矩陣。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。