詳細解答

STEP I 1991，第 4 題

純數學 • 幾何中的最優化

> **STEP I 1991，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q4

關鍵思路

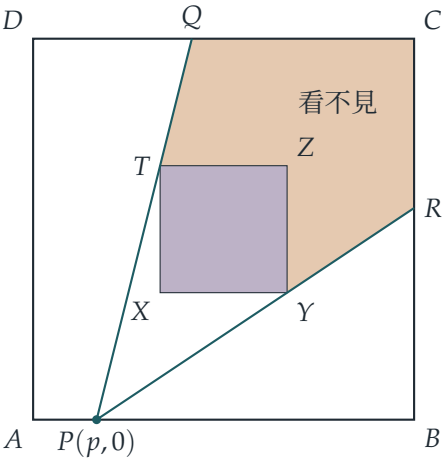
守衛能看見庭院中的每一點，只有被塔樓擋住的點除外，所以我們按照提示，求出從他所在位置 $P = (p, 0)$ 望去時塔樓「陰影」的面積。陰影的邊界是由 P 出發、剛好擦過塔樓的兩條射線。求出這兩條射線與圍牆的交點，把陰影當作多邊形計算其面積，問題便化為在 $[0, 4]$ 上求一個單變數函數的最大值。記得檢查端點。

解答

建立模型

庭院是大正方形減去塔樓，面積為 $144 - 16 = 128$。設守衛位於 $P = (p, 0)$，其中 $0 \leq p \leq 4$，並設 $H(p)$ 為他看不見的面積。可見面積為 $128 - H(p)$，所以 H 最大時可見面積最小，反之亦然。

由於 $p \leq 4$，P 位於直線 $y = 4$ 之下，並在直線 $x = 4$ 的左方（或在該直線上）。因此從 P 望去，塔樓露出它的底面 XY 和左面 XT，而它的輪廓由頂角 $T(4, 8)$ 和 $Y(8, 4)$ 決定。頂角 $Z(8, 8)$ 位於角 TPY 之內，是看不見的。看不見的區域位於路徑 $T \to Z \to Y$ 之外，夾在射線 PT 與 PY 之間。



擦邊射線與圍牆的交點

由 P 出發穿過 $T(4,8)$ 的射線，每橫移 $4-p$ 便上升 8，所以它到達 $y=12$ 時

$$x = p + \tfrac{12}{8}(4-p) = 6 - \tfrac{p}{2}, \qquad \text{由此得} Q = \left(6 - \tfrac{p}{2},\ 12\right).$$

由於 $4 \le 6 - \frac{p}{2} \le 6$，這一點確實在上方的圍牆 DC 上。

由 P 出發穿過 $Y(8,4)$ 的射線，每橫移 $8-p$ 便上升 4，所以它到達 $x=12$ 時

$$y = \frac{4(12-p)}{8-p}, \qquad \text{由此得} R = \left(12,\ \frac{4(12-p)}{8-p}\right).$$

當 p 由 o 增至 4 時，這個值由 6 增至 8，所以 R 在右方的圍牆 BC 上。

看不見的面積

看不見的區域是多邊形 $TQCRYZ$。求其面積最簡便的方法是

$$H = [PRCQ] - [PYZT],$$

其中 $[\cdots]$ 表示面積：即兩條射線之間一直伸延至圍牆的整個楔形，減去楔形中位於塔樓遠側兩面之前的部分（塔樓前方看得見的地面，連同塔樓本身）。

對 $P(p,0)$、$R(12,q)$、$C(12,12)$、$Q(r,12)$ 使用鞋帶公式（shoelace formula），其中 $q = \frac{4(12-p)}{8-p}$ 及 $r = 6 - \frac{p}{2}$：

$$\begin{aligned}[PRCQ] &= \tfrac{1}{2}(pq + (144-12q) + (144-12r) - 12p) \\ &= \tfrac{1}{2}(288 - 12p - 12r - (12-p)q) = 108 - 3p - \frac{2(12-p)^2}{8-p},\end{aligned}$$

這裏用了 $12r = 72 - 6p$。同樣地，對 $P(p,0)$、$Y(8,4)$、$Z(8,8)$、$T(4,8)$：

$$[PYZT] = \tfrac{1}{2}(4p + 32 + 32 - 8p) = 32 - 2p.$$

因此

$$H(p) = 76 - p - \frac{2(12-p)^2}{8-p}.$$

想一想 有沒有一個代換（substitution）能令這個函數容易求最大、最小值？

分母不好處理，這提示我們設 $u = 8 - p$，於是 u 的取值範圍是 $[4,8]$，而 $12 - p = u + 4$。這樣

$$H = 76 - (8-u) - \frac{2(u+4)^2}{u} = 68 + u - \frac{2u^2 + 16u + 32}{u} = 52 - \left(u + \frac{32}{u}\right).$$

第 (i) 部分：最小可見面積

我們需要 H 盡可能大，即 $u + \frac{32}{u}$ 盡可能小。根據算術平均—幾何平均不等式（AM–GM inequality），對 $u > 0$，

$$u + \frac{32}{u} \geq 2\sqrt{32} = 8\sqrt{2},$$

等號恰好在 $u = \frac{32}{u}$ 時成立，即 $u = 4\sqrt{2}$。這個值在 $[4,8]$ 之內（因為 $4\sqrt{2} \approx 5.66$），所以是容許的。於是 $p = 8 - u$，而當守衛位於以下位置時，可見面積最小：

$$\boxed{p = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2.34 \text{ 個單位，距離點} A}$$

在這一點，他看不見的面積是 $52 - 8\sqrt{2}$，所以他看見 $76 + 8\sqrt{2} \approx 87.3$ 平方單位。

第 (ii) 部分：最大可見面積

現在我們需要 H 盡可能小，即 $f(u) = u + \frac{32}{u}$ 在 $[4,8]$ 上盡可能大。由於 $f'(u) = 1 - \frac{32}{u^2}$，$f$ 在 $[4, 4\sqrt{2}]$ 上遞減，在 $[4\sqrt{2}, 8]$ 上遞增，所以它的最大值在端點取得。我們有

$$f(4) = 4 + 8 = 12, \qquad f(8) = 8 + 4 = 12,$$

兩者相等。所以 H 在 $u = 8$ 和 $u = 4$ 兩處，即 $p = 0$ 和 $p = 4$ 兩處，都取得其最小值 $52 - 12 = 40$。可見面積最大，為 $128 - 40 = 88$ 平方單位，此時守衛站在

$$\boxed{\text{位於} A\ (p = 0) \text{ 或} E\ (p = 4)}$$

而 AE 上再沒有其他點能做到。

驗算

- 當 $p = 0$ 時，我們可以直接手算陰影：兩條射線與圍牆相交於 $(6, 12)$ 和 $(12, 6)$，而看不見的六邊形面積為 40，與 $H(0)$ 吻合。
- 當 $p = 4$ 時，穿過 T 的射線沿直線 $x = 4$ 筆直向上，而 $H(4) = 40$ 再次成立。兩個端點的值相等是個好兆頭：公式沒有偏向一邊。
- 我們在 600×600 的網格上點算看不見的點，逐一檢驗由 P 出發的視線是否穿過塔樓。當 $p = 8 - 4\sqrt{2}$ 時，結果是 40.687，而 $52 - 8\sqrt{2} = 40.686$。當 $p = 1$ 時，結果是 40.429，而 $H(1) = \frac{283}{7} \approx 40.429$。

常見錯誤

- 用 Z 而不是 T 或 Y 作為擦邊點。從左下方望去，塔樓的輪廓由 T 和 Y 這兩個頂角決定，而不是由遠處的那個頂角決定。
- 做第 (ii) 部分時只求出駐點（stationary point）便停下來。駐點給出的是最小可見面積，所以最大值必定來自端點，而這裏有兩個。

STEP 之外

這是可見性（visibility）問題的一個小例子，這類問題屬於計算幾何（computational geometry）的研究範圍（「美術館問題」（art gallery problem）問的是：要看守一個多邊形房間的每一點，需要多少名守衛）。當中求最大、最小值的一步，展示了分析學中的一個基本事實：閉區間上的連續函數必定取得其最大值和最小值，取得之處不是駐點便是端點。這就是極值定理（extreme value theorem），其嚴謹證明可見於 Abbott, *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。