詳細解答

STEP I 1991，第 3 題

純數學 • 複數等比級數

STEP I 1991，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/91-s1-q3

關鍵思路

在阿根圖（Argand diagram）上，乘以 $re^{i\phi}$ 會把一個向量放大 r 倍，並按逆時針方向轉過角 ϕ。路徑上每一條線段都是前一條線段按相同的比例縮放、按相同的角度旋轉而成，所以每個線段向量都等於前一個乘以一個固定的複數（complex number）。於是這些線段構成一個等比數列（geometric progression），把它們加起來便得出每個頂點的位置。

解答

相鄰線段之比

由 P_n 到 P_{n+1} 的向量由 $z_{n+1}-z_n$ 表示，而由 P_{n-1} 到 P_n 的向量則由 z_n-z_{n-1} 表示。兩個複數相除時，模（modulus）相除，輻角（argument）相減：

$$\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_n-z_{n-1}}\right| = \frac{P_nP_{n+1}}{P_{n-1}P_n} = d, \qquad \arg\frac{z_{n+1}-z_n}{z_n-z_{n-1}} = \arg(z_{n+1}-z_n) - \arg(z_n-z_{n-1}) = \theta,$$

因為第二條線段的長度是第一條的 d 倍，而由一條有向線段的方向按逆時針轉到下一條的方向，所轉的角是 θ。（輻角只確定到相差 2π 的倍數，但這並不影響該複數本身。）因此，對所有 $n \geq 2$，

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_n-z_{n-1}} = d\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = d(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

z_{n+1} 的公式

設 $w = d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$。第一條線段是 $z_2 - z_1 = 1$，而其後每一條線段都是前一條的 w 倍，所以由歸納法（induction）可得

$$z_{k+1} - z_k = w^{k-1} \qquad (k \geq 1).$$

把 $k = 1, 2, \ldots, n$ 的各式相加，左邊逐項相消（telescoping），只剩下 $z_{n+1} - z_1 = z_{n+1}$：

$$z_{n+1} = 1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = \frac{w^n - 1}{w - 1} = \frac{d^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} - 1}{d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1}.$$

求等比級數（geometric series）之和時需要 $w \neq 1$，而 $d \neq 1$ 這個條件正是用在這裏，因為 $|w| = d$。

$\theta = \frac{1}{3}\pi$、$d = 2$ 的情況

這時 $w = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$，所以分母非常簡單：$w - 1 = \mathrm{i}\sqrt{3}$。由於 $\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$，

$$z_{n+1} = \frac{w^n - 1}{\mathrm{i}\sqrt{3}} = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\left(2^n \cos\tfrac{n\pi}{3} - 1 + \mathrm{i}\, 2^n \sin\tfrac{n\pi}{3}\right),$$

從而

$$\operatorname{Re} z_{n+1} = \frac{2^n \sin\frac{n\pi}{3}}{\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{Im} z_{n+1} = \frac{1 - 2^n \cos\frac{n\pi}{3}}{\sqrt{3}}.$$

想一想 $\operatorname{Im} z_{n+1}$ 的正負號怎樣告訴我們路徑穿過實軸（real axis）？

這條路徑是連貫的：它是由線段首尾相接而成的一條連續折線。如果某個頂點嚴格位於實軸下方，而其後某個頂點嚴格位於實軸上方（或者反過來），那麼兩者之間的那段路徑必定穿過實軸。所以我們要一次又一次地找出位於實軸兩側的頂點。

$\cos\frac{n\pi}{3}$ 的值以 6 為週期重複。取任意整數 $k \geq 1$。

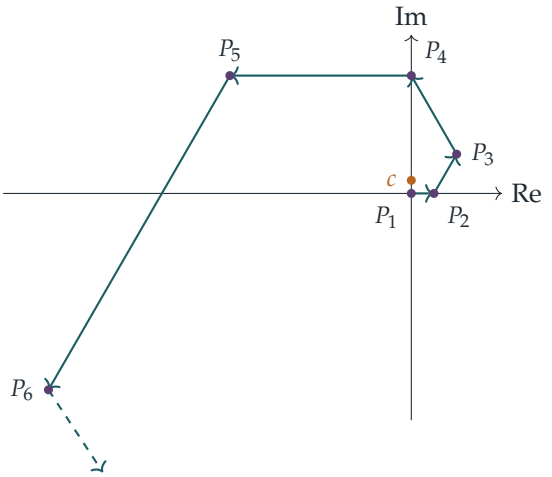
- 當 $n = 6k$ 時，$\cos\frac{n\pi}{3} = \cos 2k\pi = 1$，所以 $\operatorname{Im} z_{6k+1} = \dfrac{1 - 2^{6k}}{\sqrt{3}} < 0$，因為 $2^{6k} > 1$。
- 當 $n = 6k + 3$ 時，$\cos\frac{n\pi}{3} = \cos(2k\pi + \pi) = -1$，所以 $\operatorname{Im} z_{6k+4} = \dfrac{1 + 2^{6k+3}}{\sqrt{3}} > 0$。

因此，對所有 $k \geq 1$，P_{6k+1} 在實軸下方，而 P_{6k+4} 在實軸上方。所以對每個 $k = 1, 2, 3, \ldots$，路徑由 P_{6k+1} 到 P_{6k+4} 的那一段都會由下而上穿過實軸。這些是路徑上互不相同的部分，每個 k 對應一段，所以路徑穿過實軸無限多次。（按同樣的論證，路徑在 P_{6k+4} 與 P_{6k+7} 之間也會由上而下穿過實軸。）證明至此完成。

事實上，頂點是每三個一組地繞圈的：$\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2, \ldots$ 的正負號規律是 $0, 0, +, +, +, -, -, -, +, +, +, \ldots$。這背後有一個巧妙的幾何原因。把上式寫成

$$z_{n+1} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\, w^n,$$

可見 P_{n+1} 與定點 $c = \mathrm{i}/\sqrt{3}$ 的距離是 $2^n/\sqrt{3}$，而每走一步，它便繞 c 轉過 $60°$。各頂點位於一條環繞 c 的螺線上，這條螺線每走一步便放大一倍，而 c 剛好在實軸上方不遠處，所以螺線會不斷掃過實軸。



圖中顯示 $P_1, \ldots, P_6$；下一個頂點是 $P_7 = -21\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，遠在下方。路徑第一次穿過實軸是在 P_5P_6 上，其後一直留在實軸下方，直至在 P_8P_9 上由下而上穿過，即由 $P_8 = 64 - 21\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 到 $P_9 = 128 + 43\sqrt{3}\,\mathrm{i}$。

驗算

- 直接由幾何關係計算：$z_3 = 1 + w = 2 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$，而公式給出 $\operatorname{Im} z_3 = (1 - 4\cos\frac{2\pi}{3})/\sqrt{3} = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$。同樣地，再加上 $w^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 和 $w^3 = -8$，得 $z_5 = -8 + 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，而在公式中取 $n = 4$，得 $\operatorname{Re} z_5 = 16\sin\frac{4\pi}{3}/\sqrt{3} = -8$ 和 $\operatorname{Im} z_5 = (1+8)/\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$。
- 若 $d = 1$，各頂點會落在一個正多邊形上，路徑會閉合；等比級數的求和公式恰好在這個情況下失效，這正是應有的結果。
- 我們按長度和轉角以數值方法建構了這條路徑（d、θ 和起點均隨機選取），並確認了比值 $d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$、$z_{n+1}$ 的閉合式（closed form），以及在 $\theta = \frac{1}{3}\pi$、$d = 2$ 時上述的正負號規律：在 $z_1, \ldots, z_{41}$ 之中，$\operatorname{Im} z$ 共變號 13 次。

常見錯誤

- 把比值寫成 $\frac{1}{d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$：分子是較後的那條線段，所以它才是長 d 倍、並轉過 $+\theta$ 的那一條。

- 求和時項數差一：由 P_1 到 P_{n+1} 共有 n 條線段，所以級數加到 w^{n-1} 為止。
- 單憑一個位於軸上的頂點便聲稱路徑穿過實軸：你需要的是嚴格位於實軸兩側的頂點（這裏 z_1 和 z_2 都在實軸上，所以要由 $k \geq 1$ 開始）。

STEP 之外

規則 $z_{n+1} - z_n = w(z_n - z_{n-1})$ 是一個線性遞歸關係（linear recurrence），而把每個頂點帶到下一個頂點的映射 $z \mapsto c + w(z - c)$，是以其不動點（fixed point）c 為中心的旋轉相似變換（spiral similarity）：即旋轉與放大的結合。這類映射是莫比烏斯變換（Möbius transformation）最簡單的例子，把它們反覆迭代，便會產生貝殼上常見的等角螺線（又稱對數螺線，equiangular (logarithmic) spiral）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）以這種幾何眼光看待複數乘法，闡述得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。