詳細解答

STEP I 1991，第 2 題

純數學 • 變率

> **STEP I 1991，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q2

關鍵思路

把融化規律改用半徑來表達。對球體而言，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，而表面積同樣是 $4\pi r^2$，所以「體積減少的速率與表面積成正比」其實只是說半徑以恆定速率縮短。兩個雪球的比例常數相同，因此在任何一段時間內，兩個半徑縮短的長度都相同。於是所有量都變成單一變量的函數（function），這個變量就是每個半徑縮短了的長度 x。

解答

兩個半徑以相同的恆定速率縮短

設雪球的半徑為 r，體積為 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$，表面積為 $S = 4\pi r^2$。融化規律是 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -kS$，其中 $k > 0$ 為常數，兩個雪球的常數相同。由鏈式法則（chain rule），

$$4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k \cdot 4\pi r^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k,$$

這裏兩邊除以 $4\pi r^2$，只要雪球仍然存在（$r > 0$），這一步便成立。所以經過時間 t 後，兩個半徑都減少了相同的長度 $x = kt$：頭部的半徑為 $2R - x$，身體的半徑為 $3R - x$，適用於 $0 \le x \le 2R$（頭部在 $x = 2R$ 時消失）。

高度減半時的體積

由於頭部放在身體之上，Frosty 的高度是兩個直徑之和：

$$h = 2(2R - x) + 2(3R - x) = 10R - 4x.$$

最初 $h = 10R$，所以高度減半即 $10R - 4x = 5R$，也就是 $x = \frac{5}{4}R$。這個值小於 $2R$，所以頭部仍然存在，此時兩個半徑分別為 $\frac{3}{4}R$ 和 $\frac{7}{4}R$。因子 $\frac{4}{3}\pi$ 在比值中約去，所以

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{7}{4}\right)^3}{2^3 + 3^3} = \frac{(27 + 343)/64}{35} = \frac{370}{2240} = \frac{37}{224}.$$

所以當 Frosty 的高度減半時，他的體積只剩下原來的 $\frac{37}{224} \approx 0.165$：體積隨長度的三次方而變化。

$\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ 的最大值

記 $a = 2R - x$ 及 $b = 3R - x$。當 $0 \le x < 2R$ 時，

$$V = \tfrac{4}{3}\pi(a^3 + b^3), \qquad S = 4\pi(a^2 + b^2),$$

又因為 $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} = -1$，

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -4\pi(a^2 + b^2), \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -8\pi(a + b).$$

想一想 V 和 S 都是時間（或 x）的函數。那麼 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ 是甚麼意思？

當 x 增加時，S 嚴格遞減（因為 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} < 0$），所以 V 可以看成 S 的函數。由鏈式法則 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \Big/ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{a^2 + b^2}{2(a + b)}.$$

現在利用 $b - a = R$，這個關係始終不變。設 $s = a + b = 5R - 2x$。那麼 $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}((a + b)^2 + (b - a)^2) = \frac{1}{2}(s^2 + R^2)$，所以

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{s^2 + R^2}{4s} = \frac{s}{4} + \frac{R^2}{4s} = f(s), \text{ 記為此.}$$

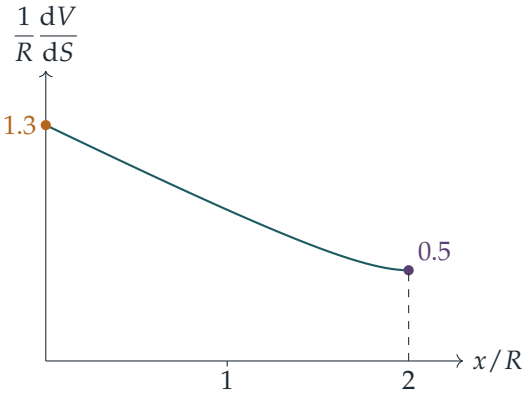
當 x 由 0 增至 $2R$ 時，s 由 $5R$ 減至 R。而

$$f'(s) = \frac{1}{4} - \frac{R^2}{4s^2} = \frac{s^2 - R^2}{4s^2} > 0 \quad \text{當} s > R,$$

所以 f 在 $[R, 5R]$ 上遞增，其最大值在 $s = 5R$ 處取得，也就是在最開始的時候（$x = 0$）：

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S}\right)_{\max} = \frac{5R}{4} + \frac{R}{20} = \frac{13R}{10}.$$

（直接計算：$\frac{4R^2 + 9R^2}{2 \cdot 5R} = \frac{13}{10}R$。）其後這個值持續下降，到頭部剛好消失時降至 $f(R) = \frac{1}{2}R$。



驗算

- 對每個雪球按 $\frac{dV}{dt} = -kS$ 逐步模擬（取 $R = k = 1$），在 $t \approx 1.25$ 時高度減半，體積比為 0.16518，與 $\frac{37}{224} = 0.165178\ldots$ 吻合。
- 模擬所得的 V 和 S 的有限差分（finite differences）自始至終與 $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$ 相符，而且從不超過 $1.3R$。
- 單位：dV/dS 是體積除以面積，所以是長度，$\frac{13}{10}R$ 正是如此。

常見錯誤

- 把高度當成兩個半徑之和，而不是兩個直徑之和。（在這題中碰巧不會改變 x 的值，但做法是錯的。）
- 計算了 V/S 而不是 dV/dS；對單一球體而言，$V/S = r/3$，但 $dV/dS = r/2$。
- 一味尋找駐點（stationary point）：f 的轉向點在 $s = R$，即區間的端點，所以最大值在區間的另一端。

STEP 之外

這道題的核心在於：「速率與表面積成正比」這條規律，會化為半徑以恆定速率變化，這是幾何如何令微分方程（differential equation）變得輕而易舉的第一個例子。後半部分是參數式導數（parametric derivative），即沿曲線 $(S(t), V(t))$ 的 dV/dS，以及在閉區間（closed interval）上求最大值時須有的謹慎：最大值可能位於端點，而不是駐點；Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）解釋了為何這樣的最大值必定存在。至於以微分方程建立模型，可參考 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential*

Equations（初等微分方程）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。