詳細解答

STEP I 1991，第 16 題

概率與統計 • 條件概率

> **STEP I 1991，第 16 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q16

關鍵思路

把一切按觀察時刻 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 來整理，即每隻爬行動物第一次察看馬路之後的分鐘數。蟾蜍的等候時間服從幾何分佈（geometric distribution），所以牠必定會過路。青蛙則不同：牠的規則迫使牠最遲在 $n = 3$ 時作出決定，所以牠的故事只有四個階段，我們可以逐一列出牠在每個階段安全過路的概率。有了這張清單，與蟾蜍的比較以及條件概率（conditional probability）都只不過是幾個求和而已。

解答

全題假設各次觀察時馬路的狀況互相獨立（independent），每次安全的概率為 0.1，並且蟾蜍與青蛙的行動互相獨立。這是合理的，因為青蛙是「稍後」才過路，時間並不相同。由於過路所需的時間可以忽略，在第 n 次觀察時過路的爬行動物會在時間 n 分鐘到達。

蟾蜍

蟾蜍只會在安全時過路，所以牠永遠不會被輾過。經過第 $0, 1, \ldots, k$ 次觀察後牠仍在等候的概率為 0.9^{k+1}，而這個概率趨向 0。所以牠最終會安全過路，概率為

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k(0.1) = \frac{0.1}{1 - 0.9} = 1.$$

以 T 表示牠過路的時間。那麼 $P(T = k) = 0.9^k(0.1)$，另外為方便稍後使用，$P(T > k) = 0.9^{k+1}$。

青蛙

在第 n 次觀察時，若牠仍在等候：

- 有 0.1 的概率馬路安全，牠安全過路；
- 有 $0.9 \cdot \frac{n}{3}$ 的概率馬路不安全但牠照樣過路，安全到達的概率為 0.2，被輾過的概率為 0.8；
- 有 $0.9\left(1-\frac{n}{3}\right)$ 的概率牠等待下一次觀察。

在 $n=0$ 時牠絕不冒險，而在 $n=3$ 時，不安全也照樣過路的機會是 1，所以若牠之前仍未出發，在 $n=3$ 時必定出發。特別地，$n>3$ 的情況永遠不會出現。

牠在第 n 次觀察時仍在等候的概率為

$$w_0=1,\quad w_1=0.9,\quad w_2=0.9\cdot 0.9\cdot\tfrac{2}{3}=0.54,\quad w_3=0.54\cdot 0.9\cdot\tfrac{1}{3}=0.162.$$

在第 n 次觀察時，牠安全到達的概率為 $w_n\left(0.1+0.9\cdot\frac{n}{3}\cdot 0.2\right)=w_n(0.1+0.06n)$。以 s_n 表示這個概率，

$$s_0=1\times 0.1=0.1,\qquad s_1=0.9\times 0.16=0.144,$$
$$s_2=0.54\times 0.22=0.1188,\qquad s_3=0.162\times 0.28=0.04536.$$

因此

$$P(\text{青蛙安全過路})=0.1+0.144+0.1188+0.04536=\boxed{0.40816=\tfrac{2551}{6250}}.$$

牠被輾過的概率就是餘下的 $1-0.40816=0.59184$。

兩者皆安全，而青蛙較快

設 F 為青蛙安全到達的時間。我們需要兩者都安全到達，並且 $F<T$。蟾蜍必定安全，而由獨立性，

$$P(\text{青蛙安全過路於}n\text{ 且}T>n)=s_n\,P(T>n)=s_n(0.9)^{n+1}.$$

想一想 為甚麼是 $T>n$ 而不是 $T\geq n$？

若兩者在同一個觀察時刻 n 過路，牠們所用的時間相同，青蛙並非嚴格地較快。所以蟾蜍在時間 n 的那次觀察之後必須仍在等候，其概率為 0.9^{n+1}。對青蛙四個可能的時間求和，

$$\begin{aligned}P&=0.1(0.9)+0.144(0.81)+0.1188(0.729)+0.04536(0.6561)\\&=0.09+0.11664+0.0866052+0.029760696\\&=0.323005896\approx\boxed{0.323}.\end{aligned}$$

寫成準確的分數，這就是 $\frac{40375737}{125000000}$。

最後一部分

設 A 為青蛙在第一次觀察後 2 分鐘仍未到達對面這一事件，R 為牠被輾過這一事件。由於過路是瞬間完成的，在 $n = 2$ 那次觀察時安全過路的青蛙，在 2 分鐘時已經到達。所以 A 是「在 $n = 0$、1 或 2 時安全過路」的補事件（complement）：

$$P(A) = 1 - (s_0 + s_1 + s_2) = 1 - 0.3628 = 0.6372.$$

被輾過的青蛙在任何時間都永遠不會到達，所以 $R \subseteq A$，並且 $P(R \cap A) = P(R) = 0.59184$。因此

$$P(R \mid A) = \frac{0.59184}{0.6372} = \frac{59184}{63720} = \boxed{\frac{274}{295} \approx 0.929}.$$

這包括了已經被輾過的青蛙（在 $n = 1$ 或 $n = 2$ 時），以及仍在等候、其後在 $n = 3$ 時被輾過的青蛙，正如「在某個階段」所要求的那樣。

（有些讀者把這個條件理解為：經過 $n = 0$ 和 $n = 1$ 兩次觀察後牠仍未到達，也就是在 $n = 2$ 那次察看之前。這種理解得出 $0.59184/(1 - 0.244) = \frac{137}{175} \approx 0.783$。我們較傾向採用上面的理解，因為恰好在 2 分鐘時到達，也算是在牠開始「之後 2 分鐘」到達。）

驗算

- 青蛙的各種結果必須涵蓋所有情況：在 $n = 1, 2, 3$ 時被輾過的概率分別為 $0.9(0.24)$、$0.54(0.48)$ 和 $0.162(0.72)$，即 $0.216 + 0.2592 + 0.11664 = 0.59184$，恰好等於 $1 - 0.40816$。
- 青蛙安全過路的概率遠低於蟾蜍那必然的 1，對沒有耐性的一方來說理應如此。
- 以分數作準確枚舉，再以蒙地卡羅模擬（Monte Carlo simulation）模擬 10^6 對爬行動物，得出 0.4087、0.3234 和 0.9286，與 0.40816、0.32301 和 0.92881 吻合。

常見錯誤

- 讓青蛙在 $n = 0$ 時冒險：按規則，那時 $n/3 = 0$。
- 忘記青蛙的過程在 $n = 3$ 時終止，於是像處理蟾蜍那樣為牠求一個幾何級數（geometric series）的和。
- 在最後一部分，分母用了 $P(\text{未能安全過路於} n \leq 2)$，分子卻只放進截至 $n = 2$ 為止被輾過的情況。題目問的是在任何階段被輾過，包括 $n = 3$。

STEP 之外

青蛙的旅程是一條小型的馬可夫鏈（*Markov chain*），帶有吸收態（absorbing states）（「安全」和「被輾過」），而蟾蜍的等候時間服從幾何分佈，即無記憶（memoryless）的指數分佈（exponential distribution）的離散版本。馬可夫鏈的吸收概率（absorption probabilities）和首達時間（hitting times）是大學第一門概率課程的核心課題。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入門教科書）對兩者都有詳細闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。