詳細解答

STEP I 1991，第 15 題

概率與統計 • 正態近似

> **STEP I 1991，第 15 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q15

關鍵思路

每個 X_j 的平均值（mean）為 0、方差（variance）為 1，而且各次擲幣互相獨立（independent），所以 S_n 的平均值為 0、方差為 n；當 n 很大時，中心極限定理（central limit theorem）容許我們把 S_n 視為近似正態分佈（normal distribution）。最後一部分看似相仿，卻藏着一個陷阱：每個 Y_k 都包含同一次首擲 X_1，所以各個 Y_k 並不獨立，而這一次共用的擲幣最終支配了整個總分。

解答

每個 X_j 取值 ± 1，概率各為 $\frac{1}{2}$，所以

$$\mathrm{E}(X_j) = 0, \qquad \mathrm{E}(X_j^2) = 1, \qquad \mathrm{Var}(X_j) = 1.$$

各次擲幣互相獨立，所以 $\mathrm{E}(S_n) = 0$ 及 $\mathrm{Var}(S_n) = n$。根據中心極限定理，當 n 很大時，

$$S_n \approx \mathrm{N}(0,\, n).$$

（等價地，若 H 為擲得正面的次數，則 $H \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{2})$，且 $S_n = H - (n - H) = 2H - n$。）

第 (i) 部分

當 $n = 10\,000$ 時，S_n 的標準差（standard deviation）為 $\sqrt{10\,000} = 100$，所以

$$\mathrm{P}(S_n > 100) \approx \mathrm{P}\left(Z > \frac{100}{100}\right) = 1 - \Phi(1) \approx 0.16.$$

如果想再謹慎一點，可對 H 使用連續性校正（continuity correction）：$S_n > 100$ 即 $2H - 10\,000 > 100$，亦即 $H \geq 5051$。由於 H 的平均值為 5000、標準差為 50，

$$\mathrm{P}(H \geq 5051) \approx \mathrm{P}\left(Z > \frac{5050.5 - 5000}{50}\right) = 1 - \Phi(1.01) \approx 0.156.$$

無論用哪一種方法，答案都約為 0.16。

第 (ii) 部分

標準化（standardising）後，

$$\mathrm{P}(S_n > 0.01n) \approx \mathrm{P}\left(Z > \frac{0.01n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(0.01\sqrt{n}\right).$$

這個值隨 n 增大而減小，而且它小於 0.01 當且僅當 $\Phi(0.01\sqrt{n}) > 0.99$。查表得 $\Phi(2.326) = 0.99$，所以我們需要

$$0.01\sqrt{n} > 2.326 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{n} > 232.6 \quad \Longleftrightarrow \quad n > 54\,100 \text{(約數)}.$$

所以符合條件的最小 n 大約是 54 000。（若改用 2.33，則得出約 54 300；在這個近似程度下，任何接近 5.4×10^4 的答案都算正確。）

新的計分方法

對於 $2 \leq k \leq n$，首擲與第 k 擲共有四種情況：

首擲	第 k 擲	得分 Y_k	$X_1 + X_k$
H	H	2	$1 + 1 = 2$
T	T	-2	$-1 - 1 = -2$
H	T	0	$1 - 1 = 0$
T	H	0	$-1 + 1 = 0$

最後兩欄在每種情況下都相同，所以 $Y_k = X_1 + X_k$，正如題目所求。

平均值與方差。 由線性性質（linearity），$\mathrm{E}(Y_k) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_k) = 0$。由於 $k \geq 2$，X_1 與 X_k 來自不同的兩次擲幣，因此互相獨立，於是

$$\mathrm{Var}(Y_k) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_k) = 2.$$

（直接計算：Y_k 取值 2、-2、0 的概率分別為 $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$，所以 $\mathrm{E}(Y_k^2) = 2$。）

極限。 設 $m = n - 1$ 及 $T = Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_n$。那麼

$$T = \sum_{k=2}^{n} (X_1 + X_k) = mX_1 + S', \qquad \text{其中} S' = X_2 + X_3 + \cdots + X_n.$$

想一想 每個 Y_k 的平均值為 0、方差為 2，就像一個經過縮放的 X_j。為甚麼我們不能直接照搬第 (ii) 部分的論證？

因為第 (ii) 部分的論證需要各項互相獨立，而各個 Y_k 並不獨立：它們全都共用 X_1。事實上，對於 $j \neq k$，$\mathrm{Cov}(Y_j, Y_k) = \mathrm{Var}(X_1) = 1$，而 $\mathrm{Var}(T) = m^2 + m$，並不是 $2m$。所以我們把 X_1 的兩個取值分開考慮。留意 S' 是 m 個取值為 ± 1 的項之和，所以 $-m \leq S' \leq m$。

- 若首擲是反面，則 $X_1 = -1$ 且 $T = -m + S' \leq 0$。所以 $T > 0.01m$ 不可能發生。
- 若首擲是正面，則 $X_1 = 1$ 且 $T = m + S'$，所以 $T > 0.01m$ 當且僅當 $S' > -0.99m$。沿用第 (ii) 部分的正態近似，取 $S' \approx \mathrm{N}(0, m)$，

$$\mathrm{P}(S' \leq -0.99m) \approx \Phi\left(-0.99\sqrt{m}\right) \to 0 \quad \text{當} m \to \infty.$$

（其實無須使用近似：根據切比雪夫不等式（Chebyshev's inequality），這個概率至多為 $m/(0.99m)^2 \to 0$。）

由於 S' 與 X_1 獨立，

$$\mathrm{P}(T > 0.01m) = \tfrac{1}{2} \cdot 0 + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{P}(S' > -0.99m) \;\to\; \tfrac{1}{2} \quad \text{當} n \to \infty.$$

所以該命題是**錯誤**的：這個概率趨向 $\frac{1}{2}$，而不是 0。用文字來說，當 n 很大時，總分為正基本上就等同於首擲是正面，否則總分便不是正數。

驗算

- 第 (i) 部分：對於 $H \sim \mathrm{B}(10\,000, \frac{1}{2})$，精確的二項概率 $\mathrm{P}(H \geq 5051)$ 為 0.15625，與經連續性校正的數值 0.156 吻合。
- 第 (ii) 部分：$\mathrm{P}(S_n > 0.01n)$ 的精確二項數值在 $n = 50\,000$ 時為 0.0125，在 $n = 54\,000$ 附近約為 0.0100，在 $n = 55\,000$ 時為 0.0094，所以臨界值確實接近 54 000。
- 最後部分：對 $n \leq 14$ 列舉全部 2^n 個結果，所得與 $\frac{1}{2}\,\mathrm{P}(S' > -0.99m)$ 完全一致；在 $n = 14$ 時概率已達 0.49994，而以 $n = 100$ 進行的一次模擬則得出 0.497。

常見錯誤

- 把 $Y_2, \ldots, Y_n$ 當作互相獨立，從而得出 $\mathrm{Var}(T) = 2(n-1)$，令概率看似趨向 0。
- 計算得分的方差時，用了 $\mathrm{Var}(S_n) = n/4$（即正面次數的方差）而不是 n。

STEP 之外

第 (ii) 部分是弱大數定律（weak law of large numbers）的一個定量形式：只要 n 夠大，S_n/n 就極不可能遠離 0。最後一部分則顯示，當各項之間有很強的相依關係時，這條定律會如何失效：這裏每一項都共用首擲，所以平均值 $T/m = X_1 + S'/m$ 趨向 X_1 這個隨機量，而不是趨向平均值 0。相依序列的大數定律（遍歷定理（ergodic theorems）、可交換序列（exchangeable sequences））是大學本科概率論中內容豐富的課題；Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）涵蓋了弱大數定律和切比雪夫不等式。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。