詳細解答

STEP I 1991，第 14 題

概率與統計 • 三角形的計數

> **STEP I 1991，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q14

關鍵思路

三個長度 $a > b > c$ 能構成非退化三角形（non-degenerate triangle），當且僅當最長的一條嚴格短於其餘兩條之和，即 $b + c > a$；另外兩個三角不等式（triangle inequality）自動成立。因此固定 a 之後，我們對每個 b 數出夾在 $a - b$ 與 b 之間的 c 值有多少個。這些數目每次遞增 2，奇數（或偶數）之和正是由此而來。之後對所有可能的 a 求和，只需用到 $\sum k^2$ 的標準公式。

解答

三角形何時存在？

設 $a > b > c > 0$。非退化三角形須滿足的三個三角不等式是

$$b + c > a, \qquad a + c > b, \qquad a + b > c.$$

後兩個自動成立，因為 a 本身已經大於 b，也大於 c。所以三根棒能構成非退化三角形，當且僅當 $b + c > a$。（若 $b + c = a$，這個「三角形」是扁平的，面積為零，不計算在內。）

最長的棒長度為偶數

固定 a。我們需要整數 b, c 滿足

$$a - b < c < b, \qquad b < a.$$

對於給定的 b，滿足 $a - b + 1 \le c \le b - 1$ 的整數 c 共有

$$(b - 1) - (a - b + 1) + 1 = 2b - a - 1,$$

個，前提是這個數為正；否則一個也沒有。（留意這裏 $c \geq a-b+1 \geq 2$，所以 c 自動是一個真正的棒長。）

現在設 a 為偶數。那麼 $2b-a-1$ 是奇數，而它至少為 1 的充要條件是 $b \geq \frac{a}{2}+1$。因此 b 由 $\frac{a}{2}+1$ 取到 $a-1$，得出

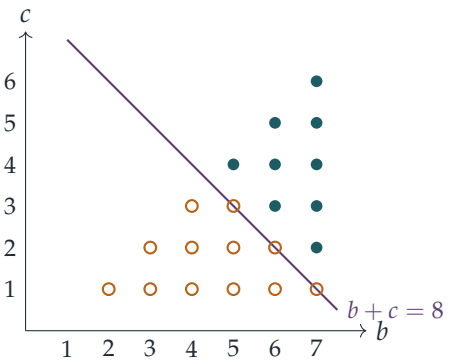
$$\begin{aligned} b = \tfrac{a}{2}+1: &\quad 2b-a-1 = 1, \\ b = \tfrac{a}{2}+2: &\quad 2b-a-1 = 3, \\ &\vdots \\ b = a-1: &\quad 2b-a-1 = a-3. \end{aligned}$$

b 每增加 1，數目便增加 2，所以以這根棒為最長邊的三角形數目是

$$1+3+5+\cdots+(a-3),$$

正如題目所求。（當 $a=2$ 時這個和是空的，這是對的：沒有三角形的最長邊是 2。）首 k 個奇數之和是 k^2，而這裏共有 $\frac{a-2}{2}$ 項，所以這個數目是 $\left(\frac{a-2}{2}\right)^2$。

下圖顯示 $a=8$ 的情況：每一點代表一對 (b,c)，其中 $8>b>c$，而實心點是位於直線 $b+c=8$ 上方的那些點。各列分別有 1、3 和 5 個實心點。



最長的棒長度為奇數

現在設 a 為奇數。那麼 $2b-a-1$ 是偶數，而它為正的充要條件是 $b \geq \frac{a+3}{2}$。當 b 由 $\frac{a+3}{2}$ 取到 $a-1$ 時，數目依次為 $2,4,\ldots,a-3$，所以三角形的數目是

$$2+4+6+\cdots+(a-3) = 2\left(1+2+\cdots+\tfrac{a-3}{2}\right) = \frac{a-3}{2}\cdot\frac{a-1}{2} = \frac{(a-1)(a-3)}{4}.$$

（同樣，$a=3$ 時正確地得出 0。）

三角形的總數

最長的棒可以是 $3,4,\ldots,2N+1$ 中任何一個（更小的值反正只會得出零）。

偶數 $a=2m$，$m=1,\dots,N$：數目是 $(m-1)^2$，所以這部分合共貢獻

$$\sum_{m=1}^{N}(m-1)^2=\sum_{k=1}^{N-1}k^2=\frac{(N-1)N(2N-1)}{6}.$$

奇數 $a=2m+1$，$m=1,\dots,N$：數目是 $\frac{(2m)(2m-2)}{4}=m(m-1)$，所以這部分合共貢獻

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{N}(m^2-m)&=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}-\frac{N(N+1)}{2}\\&=\frac{N(N+1)(2N-2)}{6}=\frac{(N-1)N(N+1)}{3}.\end{aligned}$$

兩者相加，能構成非退化三角形的選法數目是

$$T_N=\frac{N(N-1)}{6}\big[(2N-1)+2(N+1)\big]=\frac{N(N-1)(4N+1)}{6}.$$

? **想一想** 為甚麼要按 a 的奇偶性（parity）把和式分開，而不是對單一公式求和？

對於給定的 a，當 a 為偶數時數目是 $\frac{(a-2)^2}{4}$，但當 a 為奇數時卻是 $\frac{(a-1)(a-3)}{4}=\frac{(a-2)^2-1}{4}$。這是兩個不同的 a 的多項式（polynomial），所以寫成 $a=2m$ 或 $a=2m+1$ 之後，兩者各自變成 m 的簡單多項式，可以用標準公式求和。

驗證 $N=3$ 的情況

公式給出 $T_3=\frac{3\cdot2\cdot13}{6}=13$。以長度為 $1,\dots,7$ 的棒直接列舉，把三角形寫成 (a,b,c)：

- $a=4$（一個）：$(4,3,2)$；
- $a=5$（兩個）：$(5,4,2)$, $(5,4,3)$；
- $a=6$（四個）：$(6,4,3)$, $(6,5,2)$, $(6,5,3)$, $(6,5,4)$；
- $a=7$（六個）：$(7,5,3)$, $(7,5,4)$, $(7,6,2)$, $(7,6,3)$, $(7,6,4)$, $(7,6,5)$。

合共 $1+2+4+6=13$ 個三角形，與公式吻合（亦與偶數 a 的 $1=1^2, 4=2^2$ 及奇數 a 的 $2=2\cdot1, 6=3\cdot2$ 吻合）。

概率

隨機抽出三根棒而不放回（without replacement），$\binom{2N+1}{3}$ 種無序選法中每一種的可能性均等。由於

$$\binom{2N+1}{3}=\frac{(2N+1)(2N)(2N-1)}{6},$$

構成非退化三角形的概率（probability）是

$$\frac{T_N}{\binom{2N+1}{3}} = \frac{N(N-1)(4N+1)}{(2N+1)\,2N\,(2N-1)} = \frac{(N-1)(4N+1)}{2(4N^2-1)},$$

其中約去了因子 N，並用到 $(2N+1)(2N-1) = 4N^2 - 1$。這就是所求的結果。

驗算

- 當 $N = 3$ 時，概率是 $\frac{2\cdot 13}{2\cdot 35} = \frac{13}{35}$，與 $\binom{7}{3} = 35$ 種選法中有 13 個三角形相符。
- 當 $N \to \infty$ 時，概率趨向 $\frac{4N^2}{8N^2} = \frac{1}{2}$。這與連續的版本一致：在 $[0,1]$ 上取三個獨立的均勻分佈長度，最長者小於其餘兩者之和的機會是 $\frac{1}{2}$。
- 對 N 由 2 至 29 的每個值，以窮舉法（brute force）數遍所有三元組，結果與 T_N 及概率公式完全吻合。

常見錯誤

- 用了 $b + c \geq a$：等號成立時得到的是扁平三角形，題目已把它排除，於是每個數目都會偏大。
- 把三個三角不等式逐一分開檢查，或者忘記了一旦 a 是最長的，就只有 $b + c > a$ 才起作用。
- 把 b 的範圍算錯一位；應以一個小例子檢驗，例如 $a = 6$（三角形為 $(6,4,3)$, $(6,5,2)$, $(6,5,3)$, $(6,5,4)$，即 $1 + 3$）。

STEP 之外

像圖中那樣數算區域內的格點（lattice point），是計算面積的離散版本；而當 N 增大時，這個數目除以 $\binom{2N+1}{3}$ 會趨近單位立方體內的一個體積比。這種由離散均勻分佈（uniform distribution）過渡到連續均勻分佈的做法，以及折棒問題（broken-stick problem）這類「幾何概率」（geometric probability）題目，都是大學一年級的經典課題。想進一步閱讀，Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）是個好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。