詳細解答

STEP I 1991，第 13 題

力學 • 動量守恆

> **STEP I 1991，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q13

關鍵思路

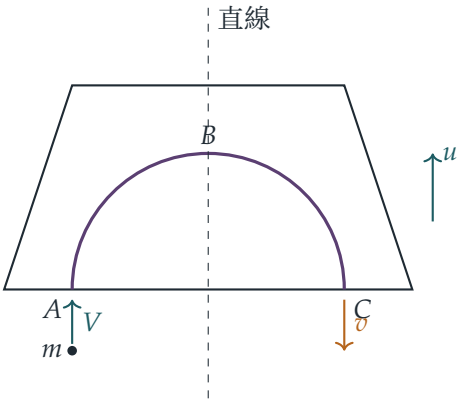
桌面光滑，凹槽也光滑，所以沒有任何外力沿直線方向推動系統，也沒有任何力作功。由此得到兩條守恆定律：沿直線方向的動量（momentum）守恆，以及動能（kinetic energy）守恆。凹槽在出口處的切線與直線平行，所以在出口處兩個速度都沿着直線，這時兩條定律的用法就與一維彈性碰撞（elastic collision）完全一樣。至於固定的薄片（lamina），平均力就是總衝量（impulse）除以所需時間。

關於題目用字，有一點要說明：題目說在 A 和 B 的切線與直線平行，但從圖中可見，與直線平行的其實是兩端 A 和 C 的切線（在 B 處凹槽與直線成直角）。我們採用 A 和 C，這顯然才是題目的原意。

解答

可移動的薄片

把質點（particle）看成點質量，把薄片看成只能沿直線平移的剛體（rigid body），並假設所有接觸面都是光滑的。取該直線為軸，以質點在 A 進入凹槽時的運動方向為正方向。



設質點離開 C 時沿直線的速度為 v（以 V 的方向為正），並設薄片此時沿直線的速度為 u。

想一想 為甚麼質點在 C 的速度必定沿着直線？

相對於薄片，質點沿凹槽運動，所以它在 C 的相對速度（relative velocity）沿着該處的切線，而這條切線與直線平行。薄片本身只沿直線運動。兩者相加，質點在 C 的實際速度同樣沿着直線。因此在出口處，每個物體只需要用一個數來描述。

在運動過程中，系統（質點加薄片）所受的外力有兩個：一是桌面的法向反作用力（normal reaction），方向垂直於桌面；二是令薄片保持在直線上的力，方向與直線垂直（直線是光滑的）。凹槽對質點的力與質點對凹槽的力都是內力，成對互相抵銷。所以沿直線方向的動量守恆：

$$mV = mv + Mu. \tag{1}$$

所有接觸面都是光滑的，而且桌面是水平的，所以沒有作功，動能守恆。（凹槽的法向反作用力確實分別對質點和薄片作功，但這兩個功互相抵銷，因為反作用力垂直於相對速度。）所以

$$\tfrac{1}{2}mV^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}Mu^2. \tag{2}$$

把 (1) 和 (2) 改寫成

$$m(V - v) = Mu, \qquad m(V - v)(V + v) = Mu^2.$$

其中一個解是 $v = V$、$u = 0$：這是在 A 處、一切尚未發生時的情況。在 C 處，質點相對於薄片是向後運動的，所以 $v \neq V$ 而且 $u \neq 0$，於是可以把第二條方程除以第一條，得到

$$V + v = u.$$

（這表示質點相對於薄片的速率在兩端都是 V，與彈性碰撞的情況一樣。）把 $u = V + v$

代入 (1)：

$$mV = mv + MV + Mv \quad \Longrightarrow \quad v = -\frac{M-m}{M+m}V, \qquad u = V + v = \frac{2m}{M+m}V.$$

由於 $m < M$，v 是負數：質點從 C 出來時，是沿着來時的方向往回走。所以當質點離開凹槽時，

$$\text{質點的速率} = \frac{M-m}{M+m}V, \qquad \text{薄片的速率} = \frac{2m}{M+m}V,$$

其中薄片沿質點原來的方向運動，質點則沿相反方向運動。

質點確實能夠走完整條凹槽：假如它在某一點相對於薄片靜止，它的速度就會與薄片相同，這時動能會是 $\frac{1}{2}(mV)^2/(M+m) < \frac{1}{2}mV^2$，與能量守恆矛盾。所以它的相對速率永遠不會降至零。

固定不動的薄片

現在薄片不能移動。凹槽對質點的反作用力垂直於質點的速度，所以不作功，質點以恆定速率 V 走過半圓。半圓的長度是 πr，所以質點在凹槽內的時間是

$$T = \frac{\pi r}{V}.$$

質點的動量由向前的 mV 變為向後的 mV，所以薄片給予質點的總衝量是 $2mV$，方向沿直線向後。質點垂直於直線方向的動量在兩端都是零，所以衝量的垂直分量是零。

根據牛頓第三定律（Newton's third law），質點給予薄片的衝量是 $2mV$，方向沿直線向前。薄片保持靜止，所以栓釘（peg）必須提供相反的衝量，而薄片推向栓釘的總衝量就是 $2mV$，方向與質點原來的運動方向相同。（根據上一段，來自直線的任何橫向推力，平均值都是零。）除以 T，栓釘所受的平均力是

$$\frac{2mV}{\pi r/V} = \frac{2mV^2}{\pi r},$$

方向與質點進入凹槽時的方向相同。（題目所說的「average force per unit time」（每單位時間的平均力）正是這個意思：每單位時間的衝量。）

我們也可以直接看出這個結果。質點需要一個指向圓心、大小為 mV^2/r 的力，所以它以 mV^2/r 的力向外推薄片。當連接質點的半徑與 CA 所成的角為 θ 時（其中 θ 以均勻的速率由 0 增至 π），這個推力沿直線方向的分量是 $(mV^2/r)\sin\theta$，而 $\sin\theta$ 在 $[0,\pi]$ 上的平均值是 $2/\pi$。

驗算

- 若 $M \to \infty$，薄片幾乎不動：$u \to 0$，而質點的速率趨向 V，與凹槽固定時的情況一樣。

- 若 $m = M$，質點出來時靜止，而薄片取得它的全部速率 V，就像兩個質量相等的物體之間的彈性碰撞。
- 取 $M = 3$、$m = 1$、$V = 2$：$v = -1$ 而 $u = 1$。動量：$1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 2 = mV$。能量：$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2$。對運動方程作數值模擬（分別用半圓形凹槽和半橢圓形凹槽），所得數值準確至小數點後六位都相同；而對固定薄片的 $(mV^2/r)\sin\theta$ 作數值積分，得到平均力為 $2mV^2/(\pi r)$，例如當 $m = 0.7$、$r = 1.3$、$V = 2.1$ 時是 1.5117。

常見錯誤

- 保留 $v = V$、$u = 0$ 這個根：它滿足兩條方程，但描述的是進入凹槽的一刻，而不是離開的一刻。
- 用了最大的力 mV^2/r，而不是沿直線方向的平均力；橫向分量會互相抵銷，而沿直線方向的分量只在 B 處才達到 mV^2/r。

STEP 之外

第一部分其實是一次隱藏的碰撞：不論凹槽是甚麼形狀，重要的只有守恆量和出口方向，這正是不必知道作用力、單憑守恆定律處理散射（scattering）問題背後的想法。在拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）中，沿直線的坐標並不出現在拉格朗日量（Lagrangian）之中，所以它的共軛動量（conjugate momentum）自動守恆；這就是對稱性與守恆定律之間的聯繫（諾特定理，Noether's theorem）的起點。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是以這種精神處理動量、衝量和碰撞。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。