詳細解答

STEP I 1991，第 12 題

力學 • 涉及摩擦力的平衡

> **STEP I 1991，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q12

關鍵思路

木板 AB 是輕的，而且只在兩端受力，兩端都是光滑鉸鏈（smooth hinge）。所以它施於 CD 的力必定沿 AB 方向。這樣問題就簡化為單一剛體（rigid body）CD，受三個未知的力作用。對 C 取力矩（taking moments）可求出 AB 中的推力（thrust），再分解力（resolving）便得到 C 處的摩擦力（friction）和法向反作用力（normal reaction）。幾何關係（兩塊木板在 B 相接）把 x 與 α、β 聯繫起來，正因如此，l 和 x 才會在答案中消去。

解答

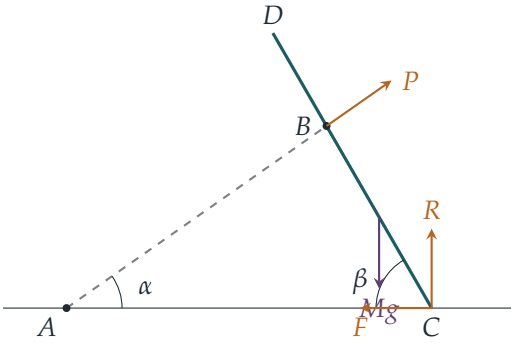
模型

我們把木板視為輕的剛性桿，把油漆工視為質量為 M 的質點（particle），並把 A 和 B 處的鉸鏈視為光滑。地面在 C 處是粗糙的，摩擦系數（coefficient of friction）為 μ。

> ? **想一想** 為甚麼兩塊木板之間在 B 處的力必定沿 AB 方向？

木板 AB 沒有重量，作用在它上面的力只來自 A 和 B 處的光滑鉸鏈。對 A 取力矩，B 處的力對 A 的力矩為零，所以它沿 BA 方向。於是 A 處的力必定與它大小相等、方向相反。根據牛頓第三定律（Newton's third law），AB 在 B 處以一個沿 AB 方向的力 P 推 CD。我們取 P 的方向為由 A 指向 B（即推力），而下面的計算會確認 $P > 0$。

因此作用在 CD 上的力有：B 處的推力 P，與水平線成仰角 α，方向背離 A；油漆工的重量 Mg，作用點沿木板距 C 為 x；以及 C 處向上的法向反作用力 R 和指向 A 的摩擦力 F。摩擦力必須指向 A，因為推力把 C 推離 A。



幾何關係

點 B 是 AB 的頂端，所以它的高度是 $2l\sin\alpha$。它沿 CD 與 C 的距離又是 $2x$，所以它的高度也是 $2x\sin\beta$。因此

$$x\sin\beta = l\sin\alpha, \qquad \text{即} \qquad x = \frac{l\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

水平距離 AC 是 AB 和 BC 的水平投影之和：

$$AC = 2l\cos\alpha + 2x\cos\beta.$$

對 CD 取力矩和分解力

對 C 取力矩。P 的作用線（line of action）就是直線 AB，它與 C 的垂直距離是 $AC\sin\alpha$。重量的作用線與 C 的水平距離是 $x\cos\beta$。兩個力矩的轉向相反，所以

$$P\cdot AC\sin\alpha = Mgx\cos\beta \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{Mgx\cos\beta}{(2l\cos\alpha + 2x\cos\beta)\sin\alpha} > 0.$$

沿水平和鉛垂方向分解力：

$$F = P\cos\alpha, \qquad R = Mg - P\sin\alpha.$$

代入 P，

$$R = Mg\left(1 - \frac{x\cos\beta}{2l\cos\alpha + 2x\cos\beta}\right) = Mg\,\frac{2l\cos\alpha + x\cos\beta}{2l\cos\alpha + 2x\cos\beta},$$
$$F = Mg\,\frac{x\cos\beta\cos\alpha}{(2l\cos\alpha + 2x\cos\beta)\sin\alpha}.$$

特別地，$R > 0$，所以 C 端一直與地面保持接觸。兩式相除，

$$\frac{F}{R} = \frac{x\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\,(2l\cos\alpha + x\cos\beta)}.$$

現在運用幾何關係 $x = l\sin\alpha/\sin\beta$。於是 $x\cos\beta = l\sin\alpha\cot\beta$，而

$$\frac{F}{R} = \frac{l\sin\alpha\cot\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\,(2l\cos\alpha + l\sin\alpha\cot\beta)} = \frac{\cos\alpha\cot\beta}{2\cos\alpha + \sin\alpha\cot\beta} = \frac{\cot\alpha\cot\beta}{2\cot\alpha + \cot\beta},$$

其中最後一步把分子和分母同除以 $\sin\alpha$。

木板 CD 只有在摩擦力足以提供這個力時才處於平衡（equilibrium），即 $F \le \mu R$。由於 $R > 0$，這就是

$$\mu \ge \frac{\cot\alpha\cot\beta}{2\cot\alpha + \cot\beta},$$

正是所求。（木板 AB 在 A 處以鉸鏈固定，所以無論它需要多大的力，都能保持不動。）

最後部分

若 B 與 D 重合，則 $2x = 2l$，所以 $x = l$。由幾何關係得 $\sin\beta = \sin\alpha$，而兩個角都是銳角，所以 $\beta = \alpha$。兩塊木板與地面構成一個等腰三角形，其中 $AC = 4l\cos\alpha$。摩擦條件變成

$$\mu \ge \frac{\cot^2\alpha}{3\cot\alpha} = \tfrac{1}{3}\cot\alpha, \qquad \text{即} \qquad \tan\alpha \ge \frac{1}{3\mu}.$$

所以當且僅當 $\alpha \ge \alpha_0$ 時才可能平衡，其中 $\tan\alpha_0 = 1/(3\mu)$。

想一想 油漆工在哪裏？當 α 變化時，距離朝哪個方向改變？

油漆工站在 CD 的中點，與 C 的距離為 l。以 A 為原點，C 位於 $(4l\cos\alpha, 0)$，而油漆工位於

$$(4l\cos\alpha - l\cos\alpha,\ l\sin\alpha) = (3l\cos\alpha,\ l\sin\alpha).$$

所以油漆工與 A 的距離的平方是

$$d^2 = 9l^2\cos^2\alpha + l^2\sin^2\alpha = l^2\left(1 + 8\cos^2\alpha\right).$$

在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上，這個量隨 α 增大而減小。所以最大距離出現在容許的最小角度 $\alpha = \alpha_0$。這時 $\tan\alpha_0 = 1/(3\mu)$，所以

$$\cos^2\alpha_0 = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha_0} = \frac{9\mu^2}{1 + 9\mu^2},$$

而

$$d_{\max}^2 = l^2\left(1 + \frac{72\mu^2}{1 + 9\mu^2}\right) = l^2\,\frac{1 + 81\mu^2}{1 + 9\mu^2}.$$

因此油漆工與 A 的最大距離是

$$l\sqrt{\frac{1 + 81\mu^2}{1 + 9\mu^2}},$$

正是所求。這個值是可以達到的，這時摩擦力剛好處於極限狀態（limiting friction）。

驗算

- 最終答案的極限情況：當 $\mu \to 0$ 時，距離趨向 l，對應 $\alpha \to \frac{\pi}{2}$，兩塊木板都豎直。當 $\mu \to \infty$ 時，距離趨向 $3l$，對應兩塊木板平放在地上，油漆工位於 $(3l, 0)$。兩者都合理。
- 若 $\beta \to \frac{\pi}{2}$，即 CD 豎直，則 $\cot\beta \to 0$，所需的 μ 趨向 0。豎直的木板不需要摩擦力，與此吻合。
- 數值驗算：取 $\alpha = 60°$ 和 $\beta = 70°$，直接解 CD 的三條平衡方程，得 $F/R = 0.13837$，與公式相符。取 $\mu = 0.5$，對 α 逐一掃描，得最大距離為 $2.55704\,l$，而公式給出 $l\sqrt{21.25/3.25} = 2.55704\,l$。

常見錯誤

- 假設 B 處的力是水平或鉛垂的。由於 AB 是輕的，而且兩端都以光滑鉸鏈連接，這個力必定沿 AB 方向。
- 在 R 中漏掉推力的鉛垂分量。這個分量會減小法向反作用力，令所需的摩擦力更難提供。
- 在最後部分，對所有 α 求最大值，而不是只對可能平衡的角度求最大值。

STEP 之外

兩端以光滑銷釘連接的輕桿稱為二力構件（two-force member）。辨認出這類構件，是工程靜力學中分析銷接框架（桁架，truss）的第一步，其中每一根這樣的構件只承受純拉力或純推力。最後部分是一個小型的約束優化（constrained optimisation）問題：目標函數是單調的，所以最優值落在可行集（feasible set）的邊界上。這個主題在線性規劃（linear programming）和優化理論中反覆出現。想進一步了解剛體的平衡，可參閱 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。