詳細解答

STEP I 1991，第 11 題

力學 • 滑輪與衝量

> **STEP I 1991，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q11

關鍵思路

每個循環分為兩個階段。重錘撞上樁時會立即停下，繩子隨之鬆弛，於是平衡錘向上飛起，再在重力作用下自由落回原處。接着繩子猛然拉緊，兩個質量分享動量，然後以第一部分求得的恆定加速度一起運動，直到重錘再次落在樁上。恆定加速度令每個階段在時間上都對稱。因此，一個循環中的每個速率，都是上一個循環中對應速率的固定倍數，等比數列（geometric progression）便隨即出現。

解答

恆定加速度

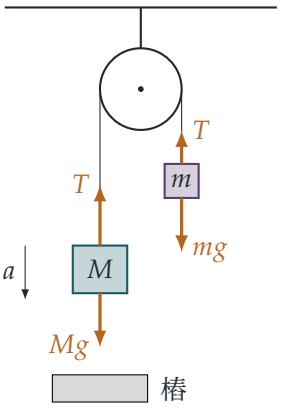
我們把重錘和平衡錘視為質點（particle），並假設繩子輕而不可伸長（light and inextensible），繞過一個光滑的輕滑輪（pulley）。繩子拉緊時，兩個質點以相同的速率 v 運動，重錘向下，平衡錘向上。設它們由靜止開始移動了距離 x 之後，速率為 v。重錘失去了勢能（potential energy）Mgx，平衡錘則增加了 mgx。滑輪光滑，繩子輕而不可伸長，所以沒有能量損失，於是

$$\tfrac{1}{2}(M+m)v^2 = (M-m)gx.$$

對時間求導，並利用 $\dot{x} = v$，

$$(M+m)v\dot{v} = (M-m)gv \quad \Longrightarrow \quad \dot{v} = g\,\frac{M-m}{M+m}$$

其中 $v \neq 0$。這是一個常數，記為 a。用牛頓第二定律（Newton's second law）也可得到同樣的結果：設 T 為張力（tension），則 $Mg - T = Ma$ 及 $T - mg = ma$，兩式相加得 $(M-m)g = (M+m)a$。



從一次碰撞到下一次碰撞

在碰撞前的一刻，重錘以速率 v 向下運動，平衡錘則以相同的速率 v 向上運動。我們分三個階段追蹤這個運動。

*撞擊。*碰撞是完全非彈性（completely inelastic）的，而樁固定不動，所以重錘停下。平衡錘仍以速率 v 向上運動，所以繩子鬆弛。這時張力幫不了平衡錘，而重錘只受重力作用，被壓在樁上，所以重錘留在原處。

*自由飛行。*繩子鬆弛時，平衡錘是一個沿鉛垂方向運動的拋體（projectile）。它上升後再回到繩子重新拉緊的位置，也就是撞擊時它所在的位置。在恆定加速度 g 之下，運動是對稱的，所以它回到該處時以速率 v 向下運動，所需時間為

$$\frac{2v}{g}.$$

*猛拉。*繩子猛然拉緊時，平衡錘以 v 向下運動，重錘則靜止。此後兩個質量必須以共同的速率 u 運動，平衡錘向下，重錘向上。根據題目容許的假設，平衡錘失去的動量（momentum）等於重錘得到的動量：

$$m(v-u) = Mu \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{mv}{M+m}.$$

想一想 為甚麼這裏不能直接對整個系統使用動量守恆（conservation of momentum）？

兩個質量沿相反方向運動，而滑輪又施加了衝量（impulse），所以並不存在一個總動量守恆的方向。真正成立的是：由於繩子是輕的、滑輪是光滑的，衝擊張力（impulsive tension）對兩個質量的大小同為 J。因此平衡錘沿繩子失去動量 J，重錘沿繩子得到動量 J。這正是題目容許我們假設的那句話。

*再次一起運動。*現在繩子拉緊，重錘以速率 u 向上運動。根據第一部分，加速度的大小

恆為 a，方向是令較重的質量 M 向下。所以重錘減速至靜止，然後落回樁上。恆定加速度令這段運動同樣對稱：重錘以速率 u 到達樁，所需時間為

$$\frac{2u}{a}.$$

所以在下一次碰撞前的一刻，平衡錘的速率為

$$u = \frac{mv}{M+m},$$

正如所求。

各段時間構成等比數列

記 $k = \dfrac{m}{M+m}$，則 $0 < k < 1$。設 v_0 為第一次撞擊前一刻的速率。根據上一部分，第 $(n+1)$ 次撞擊前一刻的速率為 $v_n = k^n v_0$。把兩個階段相加，從第 $(n+1)$ 次撞擊到下一次撞擊的時間為

$$t_n = \frac{2v_n}{g} + \frac{2kv_n}{a} = \left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) k^n v_0.$$

這是一個常數乘以 k^n，所以相繼兩次碰撞之間的時間構成等比數列，公比（common ratio）為 $k = m/(M+m)$。

總時間

設 T_0 為從釋放到第一次撞擊的時間。重錘由靜止開始以加速度 a 運動，所以 $v_0 = aT_0$。由於 $0 < k < 1$，這個等比級數（geometric series）收斂（converges），總時間為

$$T_0 + \sum_{n=0}^{\infty} t_n = T_0 + \left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) \frac{v_0}{1-k}.$$

現在 $1 - k = \dfrac{M}{M+m}$，而 $\dfrac{k}{a} = \dfrac{m}{M+m} \cdot \dfrac{M+m}{g(M-m)} = \dfrac{m}{g(M-m)}$。因此

$$\frac{2}{g} + \frac{2k}{a} = \frac{2}{g}\left(1 + \frac{m}{M-m}\right) = \frac{2M}{g(M-m)},$$

$$\left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) \frac{v_0}{1-k} = \frac{2M}{g(M-m)} \cdot \frac{M+m}{M} v_0 = \frac{2v_0}{a} = 2T_0.$$

所以碰撞有無限多次，但總共只需有限的時間。重錘最終靜止下來所需的時間為

$$T_0 + 2T_0 = 3T_0,$$

即從開始到第一次撞擊所需時間的三倍。

驗算

- 取極限 $m \to 0$。這時 $k \to 0$ 而 $a \to g$，所以重錘在第一次撞擊後不再被提起。餘下的時間只有平衡錘的飛行時間 $2v_0/g = 2gT_0/g = 2T_0$，總時間為 $3T_0$，與一般公式所預測的一致。
- 我們以隨機的 M、m 和下落高度，用數值方法逐步計算這個運動（例如 $M = 2.403$，$m = 1.571$，故 $k = 0.3953$）。速率之比和時間間隔之比都是 0.3953，而總時間（包括等比級數的尾部）則為 $2.99998\,T_0$。

常見錯誤

- 忘記了自由飛行的階段。撞擊之後平衡錘繼續向上運動，循環中包括它作為拋體所花的時間 $2v/g$。
- 在繩子鬆弛的階段用了 a 而不是 g。繩子一旦鬆弛，平衡錘便只受重力作用。
- 在猛拉的一刻寫「總動量守恆」，卻把兩個速度當作同一方向。滑輪改變了繩子的方向，所以雙方分享的是*沿繩子方向*的動量。

STEP 之外

像這部打樁機或一個彈跳的球那樣，在有限時間內發生無限多個事件，稱為芝諾現象（Zeno behaviour）。這類現象出現在混合系統（hybrid systems）的理論中，當中平滑的運動會被突然的跳躍打斷。繩子的猛拉是一個簡單的衝擊約束（impulsive constraint）。大學一年級的拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）會有系統地處理這類約束。想進一步了解衝量、碰撞和受約束運動，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。